....
Note

Name | Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Prof. Dr. M. Wolf

28. September 2012, 08:00 – 09:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **80 Punkte**

Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Topologie** **[8 Punkte]**

Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subseteq X$ offen und für $B \subseteq X$ gilt $B \cap A = \emptyset$, dann gilt auch $\overline{B} \cap A = \emptyset$.

(b) Ist $M \subseteq X$ zusammenhängend, dann ist auch $\overline{M}$ zusammenhängend.

2. **Differenzierbarkeit** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Ursprung?

$\partial_v f(0,0) =$

(b) Wie lauten die partiellen Ableitungen im Ursprung?

$\partial_x f(0,0) =$

$\partial_y f(0,0) =$

(c) Zeigen Sie, dass f im Ursprung unstetig ist.

(d) Ist f differenzierbar im Ursprung? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

3. **Ableitung einer Matrixfunktion** **[12 Punkte]**
Begründen Sie, dass für die Funktion $f(A) = (E + A^2)^{-1}$ an der Stelle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = A^{\mathrm{T}}$ definiert und differenzierbar ist. Berechnen Sie $f'(A)(B)$,
HINWEIS: Für $g(A) = A^{-1}$ ist $g'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$, Produktregel, Kettenregel.

4. **Taylorentwicklung** **(9 Punkte)**

Gegeben ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} (1 + 2x^2)e^{x^2-y} \\ -x\, e^{x^2-y} \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass F ein Gradientenfeld ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Potential von F mit $f(1, 1) = -2$. Geben Sie die Hessematrix von f an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ an.

$H_f(x, y) =$

(c) Wie lautet die Taylorentwicklung $(s, t) \mapsto f(1 + s, 1 + t)$ bis zur zweiten Ordnung an der Stelle $(s, t) = (0, 0)$ mit f aus Teilaufgabe (b)?

$f(1 + s, 1 + t) =$ $+\mathcal{O}(\|\binom{s}{t}\|^3)$

5. **Implizit definierte Funktionen** **(9 Punkte)**

Gegeben sind die Gleichungen

$$x + y + \sin z = 0,$$
$$3\sin x - 2\tan y - z = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass man dieses Gleichungssystem im Ursprung lokal gleichzeitig nach y und z auflösen kann und berechnen Sie die erste Ableitung der so implizit definierten Funktion $x \mapsto g(x)$ im Punkt $x = 0$.

(b) Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems werde im Ursprung lokal als Kurve im $\mathbb{R}^3$ durch x parametrisiert. Geben Sie mit Hilfe von (a) den Einheitstangentialvektor an diese Kurve im Ursprung an.

6. **Globale Minima und Maxima** **(16 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f und entscheiden Sie, ob diese isolierte Maxima oder Minima sind.

(b) Sei nun $B = [0, 2]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $\sup f(B)$ und $\inf f(B)$.

7. **Kurven** **(8 Punkte)**

Ein Abschnitt der Kettenlinie ist gegeben durch die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh x$.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung $\gamma : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ des Graphen von f als Kurve im $\mathbb{R}^2$ an.

(b) Parametrisieren Sie γ auf Bogenlänge.

8. **Separierbare Differentialgleichung** **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{|1 - x^2|}$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Anfangswerte $x(0)$ zur Zeit $t = 0$ ist $x(t) = x(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung?

$$x(0) \in \Big\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\}$$

(b) Bestimmen Sie für den Anfangswert $x(0) = 0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.
HINWEIS: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in [-1, 1]$.

$$x(t) =$$

(c) Ist die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = -1$ eindeutig bestimmt? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.