. . . .
Note

Name | Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I . . . .
Erstkorrektur

II . . . .
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Prof. Dr. M. Wolf

7. August 2012, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: . . . . Reihe: . . . . Platz: . . . .

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **84 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von . . . . bis . . . .

Vorzeitig abgegeben um . . . .

Besondere Bemerkungen:

1. **Topologie** **[10 Punkte]**

Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, heißt *lokal konstant*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung von x gibt, auf der f konstant ist. Zeigen Sie:

(a) Ist X zusammenhängend, so ist jede lokal konstante Funktion konstant.

(b) Es gibt lokal konstante Funktionen, die nicht beschränkt sind.

2. **Differenzierbarkeit** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die partiellen Ableitungen im Ursprung?

$\partial_x f(0,0) =$

$\partial_y f(0,0) =$

(b) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Ursprung?

$\partial_v f(0,0) =$

(c) Ist f differenzierbar im Ursprung?

☐ Ja ☐ Nein

(d) Zeigen Sie, dass f eine stetige Funktion ist.

3. **Ableitung einer Matrixfunktion** **[10 Punkte]**
Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f(A) = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ an der Stelle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A invertierbar, gegeben ist durch

$$f'(A)(B) = -A^{-1}((BA^{-1})^{\mathrm{T}} + BA^{-1})(A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

HINWEIS: Für $g(A) = A^{-1}$ ist $g'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$, Produktregel, Kettenregel.

4. **Taylorentwicklung** **[10 Punkte]**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei viermal stetig differenzierbar und der Punkt $x^* = (1, 0)$ sei ein stationärer Punkt von f mit $f(x^*) = 3$. Weiter sei

$$\partial_1^2 f(x^*) = \partial_1\partial_2 f(x^*) = 1,\ \partial_2^2 f(x^*) = 2 \text{ und } \partial_1\partial_2^2 f(x^*) = \partial_2^3 f(x^*) = -1,$$

alle anderen dritten partiellen Ableitungen verschwinden in x^*.

(a) Der Punkt x^* ist ein

☐ lokales Minimum ☐ lokales Maximum ☐ Sattelpunkt

von f.

(b) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung von f im Entwicklungspunkt x^* bis zur dritten Ordnung?

$f(x, y) =$ $+R_3(x, y)$

(c) Welche Eigenschaften folgen daraus für das Restglied $R_3(x, y)$?

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} R_3(x, y) = 0$ ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} R_3(x, y) = 0$

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{R_3(x, y)}{\|(x-1, y)\|^3} = 0$ ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{R_3(x, y)}{\|(x-1, y)\|^4} = 0$

5. **Implizite Funktionen** **[12 Punkte]**

Gegeben ist die Funktion $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3 - z$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$. Im Punkt $P = (1, 1, -1)$ gilt $f(P) = (0, 0)$. Die Gleichung $f(x, y, z) = \binom{0}{0}$ soll in einer Umgebung von P nach y und z aufgelöst werden um die Funktionen $\tilde{y}(x)$ und $\tilde{z}(x)$ zu erhalten.

(a) Wie lautet die Jacobimatrix von f im Punkt P?

$f'(P) =$

(b) Die Invertierbarkeit welcher Matrix M muss überprüft werden, um den Satz über implizite Funktionen im Punkt P anwenden zu können?

$M =$

(c) Berechnen Sie die zum Punkt P gehörenden ersten Ableitungen von $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$.

$\tilde{y}'(\quad) =$

$\tilde{z}'(\quad) =$

(d) Geben Sie die Taylorentwicklungen der Funktionen $\tilde{y}(x)$ und $\tilde{z}(x)$ im Punkt $x = 1$ bis zur ersten Ordnung an.

$\tilde{y}(x) =$

$\tilde{z}(x) =$

6. **Extrema mit Nebenbedingungen** **[14 Punkte]**
Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y) = 2xy + \frac{3}{2}x^2$ eingeschränkt auf die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 5\}$ ihr Maximum im Punkt $(2,1)$ annimmt.

7. **Vektorfelder** **[8 Punkte]**

(a) Zeigen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dass

$$\nabla \times (fF) = \nabla f \times F + f\, \nabla \times F.$$

(b) Berechnen Sie $\nabla \times G(x)$ für $x \neq 0$ mit $G(x_1, x_2, x_3) = \|x\|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

8. **Separierbare Differentialgleichungen** **[10 Punkte]**

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ mit $f(t,x) = te^{t+x}$.

(a) Geben Sie ein erstes Integral (Konstante der Bewegung) für die Differentialgleichung an.

$F(x,t) =$

(b) Geben Sie eine maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ an.

$I =$	$x(t) =$

(c) Welche Eigenschaften besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die hinreichend sind für die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen obiger Differentialgleichung?

- ☐ f ist stetig
- ☐ f ist erstes Integral
- ☐ f ist stetig differenzierbar
- ☐ f ist lipschitzstetig
- ☐ f ist lokal lipschitzstetig

(d) Ist die maximale Lösung des AWP $\dot{x} = f(t,x)$, $x(0) = 0$ eindeutig bestimmt?

☐ Ja ☐ Nein