



Aufgaben

1. Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$

- Wie lauten die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt?
- Beweisen Sie, dass f im Nullpunkt total differenzierbar ist.

2. Gradient

Gegeben sei die skalare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{|x|^2}$ und die Kurve $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie den Gradient von F .
- Wie lautet die Geschwindigkeit von $x(t)$ zum Zeitpunkt $t = 2$?
- Ist die Funktion $F \circ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung des Punktes $t = 2$ streng monoton steigend, streng monoton fallend oder keines von beiden?

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = x^2 \cosh t$.

- Geben Sie eine Lösung mit dem Anfangswert $x(0) = x_0 > 0$ an. Ist diese Lösung auf ganz \mathbb{R} definiert?
- Geben Sie eine maximale Lösung mit den Anfangswert $x(0) = 0$ an. Ist die Lösung mit dieser Anfangsbedingung eindeutig?

4. Implizit definierte Funktionen

Seien $f_1(t, x, y) = \log x + y^2 t - 4$, $f_2(t, x, y) = x^2 + yt^2 + t^2$ für $t, x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, und $P = (1, 1, -2)$. Es gilt $f_1(P) = f_2(P) = 0$.

- Die Gleichung $f_1(t, x, y) = 0$ kann offenbar in einer Umgebung des Punktes P lokal nach y aufgelöst werden. Man erhält die Funktion $(t, x) \mapsto \tilde{y}(t, x)$. Berechnen Sie $\text{grad} \tilde{y}(1, 1)$.
- Der Punkt P ist eine Lösung des Gleichungssystems $f_1(t, x, y) = 0$, $f_2(t, x, y) = 0$. Dieses soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix M muss dazu überprüft werden?
- Die lokale Auflösung von $f(t, x, y) = 0 \in \mathbb{R}^2$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, nach x und y im Punkt P ergibt die beiden Funktionen $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, definiert in einer Umgebung von $t = 1$. Berechnen Sie $\dot{\bar{x}}(1)$ und $\dot{\bar{y}}(1)$.

5. Extrema mit Nebenbedingungen

Sei $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion mit $g'(t) > 0$ für $t \geq 0$ und $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = g(\|x\|)$. Finden Sie die globalen Maxima und Minima von h unter der Nebenbedingung $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 5$.

Abgabe der Aufgaben: bis spätestens Freitag, 20.7.2012, 15 Uhr, im Briefkasten im Keller des FMI-Gebäudes