Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2012
Blatt 12
(09.07.2012)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Hausaufgaben

12.1. Picard-Iteration

Berechnen Sie für das Anfangswertproblem $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$, $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Picard-Iterierten $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und bestätigen Sie, dass $t \mapsto \lim_{k\to\infty} \phi_k(t)$ das AWP löst.

12.2. Euler-Verfahren

Gegeben ist die Differentialgleichung $\ddot{x} = -2x - 2\dot{x}$.

(a) Geben Sie eine Basis des Lösungsraums an.

(b) Schreiben Sie die Differentialgleichung als System erster Ordnung $\dot{y} = Ay$ und berechnen Sie e^{tA}.

(c) Schreiben Sie die Iterierten $\phi_k \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N}_0$, des Euler-Verfahrens zum Anfangswert $\phi_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in Abhängigkeit von der Schrittweite Δt als Matrixpotenz.

(d) Begründen Sie, dass für $\Delta t = \frac{t}{k}$ und $k \to \infty$ die Euler-Iterierten gegen den Wert von $e^{tA}\phi_0$ konvergieren.

(e) Für welche Schrittweiten Δt ist $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ unbeschränkt?

12.3. Erste Integrale

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: $E \in C^1(U, \mathbb{R})$ ist genau dann entlang jeder Integralkurve von $F \in \mathbb{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ konstant, wenn für alle $x \in U$ gilt $\partial_{F(x)} E(x) = 0$.

12.4. Separierbare und exakte Differentialgleichungen

Bestimmen Sie jeweils ein erstes Integral und damit Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $\dot{x} = \frac{2tx^2}{t^2+1}$,

(b) $\dot{x} = -\frac{1+2tx+x^2}{t^2+2tx}$ mit dem Anfangswert $x(t_0) = x_0$.

Skizzieren jeweils Sie die Integralkurven.

Abgabe der Hausaufgaben: 16.07.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung