TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2012
Blatt 8
(11.06.2012)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Hausaufgaben

8.1. Cassinische Kurven

Eine Cassinische Kurve ist der geometrische Ort $\mathcal{C}$ aller Punkte in der Ebene, für die das Produkt der Abstände zu zwei festen Punkten gleich einer Konstanten ist.

(a) Seien die beiden Punkte gegeben durch $(-c, 0)$ und $(c, 0)$ mit $c > 0$ und die Konstante gleich a^2 mit $a > 0$. Schreiben Sie $\mathcal{C}$ als Höhenlinie einer Polynomfunktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Sei $a \neq c$. In welchen Punkten ist $h(x, y) = 0$ lokal nach x oder y auflösbar?

(c) Bestimmen Sie die Punkte in $\mathcal{C}$ mit horizontalen Tangenten.

(d) Sei $a = c$. Parametrisieren Sie $\mathcal{C}$ mittels Polarkoordinaten.

8.2. Van–der–Waals–Gleichung

Ein reales Gas wird durch die Zustandsgleichung $F(p, V, T) = 0$,
$F(p, V, T) = \big(p + \frac{a}{V^2}\big)(V - b) - RT$ mit Konstanten $a, b \geq 0$, $R > 0$ beschrieben.

(a) Man zeige $\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p} = -1$ und überprüfe dies explizit für $a = b = 0$ (Ideales Gas).

(b) Sei nun $a, b > 0$. Zeigen Sie, dass sich $F|_{\mathbb{R}_+\times(b,\infty)\times\mathbb{R}_+}$ global nach p auflösen läßt. Skizzieren Sie $V \mapsto p(V, T)$ für $a = 27$, $b = 1$, $R = 1$ und $T = 7, 8, 9$ für $V \in (b, 8]$.

(c) Bestimmen Sie den Punkt $(p_c, V_c, T_c) \in F^{-1}(\{0\})$, in dem sowohl $\partial_V p(V_c, T_c) = 0$, als auch $\partial_V^2 p(V_c, T_c) = 0$ ist (kritischer Punkt) ohne die explizite Form von $p(V, T)$ zu benutzen.

8.3. Störungsrechnung

$V_\alpha(x) = (x^2 - 1)^2 - \alpha x$, $x \in \mathbb{R}$, ist ein Doppelmuldenpotential in einem konstanten elektrischen Feld der Stärke $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extrema für $\alpha = 0$.

(b) Wie verändern sich die Positionen der lokalen Extrema von V_α in Abhängigkeit von α, entwickelt bis zur zweiten Ordnung um $\alpha = 0$?

(c) Geben Sie die Werte von V_α und V_α'' in den Extremalstellen bis zur zweiten Ordnung in α an.

8.4. Eine implizit definierte Kurve

Gegeben sind die beiden Gleichungen $x^2+y^2+z^2 = 1-xy-xz$ und $2x^2+y^2 = 6+x+xz-yz$. Die Lösungsmenge enthält den Punkt $P = (x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 1)$.

(a) Man versuche, die Lösungsmenge in einer Umgebung von P explizit durch x zu parametrisieren.

(b) Berechnen Sie die Tangente der Lösungskurve durch den Punkt P.

Abgabe der Hausaufgaben: 18.06.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung