PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Sommersemester 2012
Blatt 7
(04.06.2012)

Hausaufgaben

7.1. Radialsymmetrische harmonische Funktionen

Gesucht sind alle radialsymmetrischen Lösungen der n–dimensionalen Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$, wobei radialsymmetrisch heißt, dass $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = \|y\|$.

(a) Ist $f \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ radialsymmetrisch, so gibt es ein $g \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ mit $f(x) = g(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) Welche gewöhnliche Differenzialgleichung ergibt sich für g, wenn $\Delta f = 0$ ist?

(c) Finden Sie *alle* Lösungen der Differenzialgleichung $g''(r) = \frac{1-n}{r} g'(r)$, $r > 0$, für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Parametrisieren Sie die Menge $\{\Delta f = 0 \,|\, f \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \|x\| = \|y\| \Rightarrow f(x) = f(y)\}$ durch zwei Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ für festes $n \in \mathbb{N}$.

7.2. Mehrdimensionales Newton-Verfahren, Anwendung

Zu einer Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\det(f'(x_0)) \neq 0$ definiert das Newtonverfahren zum Startwert $x_1 \in \mathbb{R}^n$ rekursiv die Folge $x_{n+1} := F(x_n)$ mit $F(x) = x - f'(x)^{-1} f(x)$, falls $\det(f'(x_n)) \neq 0$ für alle x_n. Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme die Newton-Iteration explizit an. Skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen der beiden Gleichungen. Finden Sie direkt und durch Newton-Iteration eine Lösung.

(a) $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ 2x + y^2 &= 0 \end{aligned}$

7.3. Lineare Ausgleichsrechnung

Seien $(v_i, a_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, 100$, Messwerte der Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Autos jeweils zu den Zeiten t_i, $t_i < t_{i+1}$. Das Auto wurde auf ebener Strecke zur Zeit $t_0 < t_1$ ausgekuppelt und rollte aus. Gesucht sind die Koeffizienten der Funktion $a(v) = \mu + \beta v^2$, aus denen sich Rollreibung und Luftwiderstandsbeiwert des Autos bestimmen lassen, so dass die quadratische Abweichung $\sum_{i=1}^{100} |a_i - a(v_i)|^2$ minimal ist. Unter welcher Bedingung gibt es ein eindeutiges Minimum? Geben Sie explizite Formeln für μ, β an.

HINWEIS: Die Abkürzung $\langle x^k y^l \rangle := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^k y_i^l$ für $k, l \in \mathbb{N}_0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ vereinfacht die Formeln.

7.4. Besselfunktionen

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt$ die n-te Besselfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass J_n eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe von J_0 im Ursprung und ihren Konvergenzradius.

BEMERKUNG: J_0 ist gleich seiner Taylorreihe.

Abgabe der Hausaufgaben: 11.06.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung