TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2012
Blatt 6
(29.05.2012)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Hausaufgaben

6.1. Kombinatorik

(a) Erklären Sie kurz warum es beim Lotto $\binom{49}{6}$ verschiedene Möglichkeiten gibt.

(b) 100 Schüler werden auf 3 Klassen aufgeteilt. Das Klassenzimmer der 1a hat 31, das der 1b 33 und das der 1c 36 Sitzplätze. Wieviele verschiedene Aufteilungen gibt es?

(c) Wieviele verschiedene Blätter gibt es beim Canasta (108 unterschiedliche Karten und 4 Spieler mit je 11 Karten)?

(d) Wieviele partielle Ableitungen von $f \in C^5(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gibt es, die gleich $\partial_1^3 \partial_3^2 f$ sind?

(e) ($*$) Wieviele Möglichkeiten gibt es auf dem Gitter $\mathbb{N}_0^2$ von $(0,1)$ nach $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ zu kommen, wenn nur Schritte der Länge 1 senkrecht nach oben oder waagerecht nach rechts erlaubt sind? Hinweis: Welche der insgesamt $n+k-1$ Schritte sind senkrecht?

(f) ($*$) Wieviele Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gibt es mit $|\alpha| = k$?

6.2. Binomische und multinomische Formeln

(a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kommutierend, d.h., $AB = BA$, $k \in \mathbb{N}$. Man zeige:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

(b) Sei $x \in \mathbb{C}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Man beweise durch Induktion nach n die multinomische Formel

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha.$$

(c) Welche Modifikationen im Beweis sind nötig, wenn $x_1, \ldots, x_n$ paarweise kommutierende Endomorphismen eines Vektorraums (wie z.B. $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \operatorname{End}\big(C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\big)$ sind?

6.3. Taylorentwicklungen

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Wie lautet die Taylorreihe von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + c$ im stationären Punkt x_0 von f? Man bestimme x_0 und $f(x_0)$ explizit.

(b) Entwickeln Sie $f(x,y) = \frac{e^{xy^2}}{1+x-y}$ im Ursprung bis zur dritten Ordnung.

6.4. Multipolentwicklung

Entwickeln Sie $V(x) = \frac{1}{\|x\|}$ für kleine Abweichungen $\Delta \in \mathbb{R}^n$ von $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bis zur dritten Ordnung in Δ.

Hinweis: Man drücke $\|x+\Delta\|$ durch Skalarprodukte aus und verwende die Binomialreihe $(1+t)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} t^k$ für $|t| < 1$.

Ergebnis: (mit $\hat{x} := \frac{x}{\|x\|}$)

$$V(x+\Delta) = \frac{1}{\|x\|} - \frac{\langle \hat{x}, \Delta\rangle}{\|x\|^2} + \frac{3\langle \hat{x}, \Delta\rangle^2 - \langle \Delta, \Delta\rangle}{2\|x\|^3} + \frac{3\langle \hat{x}, \Delta\rangle\langle \Delta, \Delta\rangle - 5\langle \hat{x}, \Delta\rangle^3}{2\|x\|^4} + \mathcal{O}(\|\Delta\|^4)$$

6.5. (∗) Lagrange-Punkte (`http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte`)

Das Gravitationspotential des Zweikörpersystems Erde-Mond bezüglich des mitrotierenden Koordinatensystems in der Bahnebene ist

$$V(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{(x+\mu)^2+y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} - \frac{1}{2(1+\mu)^2}(x^2+y^2).$$

Dabei ist $\mu \in (0,1)$ das Masseverhältnis Mond/Erde. Die Erdmasse und der Abstand des Mondes zum Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems sind gleich 1 gesetzt. Die Erde befindet sich also im Punkt $(-\mu, 0)$, der Mond bei $(1,0)$, beider Schwerpunkt ist im Ursprung.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von V.

(b) Begründen Sie anhand der Asymptoten von $x \mapsto \partial_x V(x,0)$ (Skizze!), dass auf der x–Achse drei stationäre Punkte von V liegen (die Lagrange-Punkte L_1, L_2 und L_3).

(c) Zeigen Sie, dass in den beiden Punkten, die ein gleichseitiges Dreieck mit der Erde und dem Mond bilden, stationäre Punkte von V liegen (Lagrange-Punkte L_4 und L_5).

(d) Zeigen Sie, dass L_4 und L_5 lokale Maxima von $V(x,y)$ sind.
Sie dürfen dazu die Hessematrix $H_V(L_{4/5}) = \frac{\sqrt{3}}{4(1+m)^2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \pm 3\frac{1-m}{1+m} \\ \pm 3\frac{1-m}{1+m} & -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ benutzen.
Dass L_4 und L_5 dennoch stabil sind (für $\mu < \frac{2}{25+3\sqrt{69}}$), liegt an der Coriolis-Kraft. Dies kann man in `http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.pdf` nachlesen.

Abgabe der Hausaufgaben: 04.06.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung