TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik
PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Sommersemester 2012
Blatt 5
(21.05.2012)
http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Hausaufgaben

5.1. Höhenlinien und Gradienten

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(a) Skizzieren Sie $\mathrm{grad} f$ und die Höhenlinien von f

(b) Bestimmen Sie die Tangente an die Höhenlinie durch den Punkt $(x_0, y_0) \neq 0$ und zeigen Sie explizit, dass sie senkrecht auf dem Gradienten an diesem Punkt steht.

(c) Geben Sie eine Lösung des AWP $\binom{\dot{x}}{\dot{y}} = \mathrm{grad} f(x, y)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ an und skizzieren Sie das Bild dieser Kurve.

5.2. Ableitungen von Polynomen

Die Dreifachfolge $(a_{klm})_{k,l,m \in \mathbb{N}_0}$, $a_{klm} \in \mathbb{R}$, habe nur endlich viele von Null verschiedene Glieder. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} a_{klm} x_1^k x_2^l x_3^m.$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{grad} f(x)$, und zeigen Sie explizit, dass $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

(b) Sei nun $a_{klm} = 0$ für $k + l + m > 2$. Zeigen Sie, dass f in der Form

$$f(x) = \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} A x + b^{\mathrm{T}} x + c$$

geschrieben werden kann, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$.

(c) Drücken Sie A, b, c in Teilaufgabe (b) durch die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt aus.

5.3. Gegenbeispiel zum Satz von Schwarz

(a) Für $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ zeige man, dass $h(x, y) := \frac{f(x,y) - f(x,0) - f0,y) + f(0,0)}{xy}$, $xy \neq 0$, auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig fortgesetzt werden kann.

(b) Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$

Berechnen Sie $\partial_1 f, \partial_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(c) Zeigen Sie $\partial_1 \partial_2 f(0, 0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0, 0)$.

5.4. Ableitungen der Matrixinversen

Sei $\mathrm{inv} : \mathbf{GL}(n) \to \mathbf{GL}(n)$ die Matrixinversion $\mathrm{inv}(A) = A^{-1}$ mit der bekannten Ableitung $\mathrm{inv}'(A)(B) = -A^{-1} B A^{-1}$.

(a) Wie lautet die zweite Ableitung $\mathrm{inv}''(A)$?

(b) Wie lautet die dritte Ableitung im Punkt A ausgewertet jeweils bei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.i., $\mathrm{inv}'''(A)(B)(B)(B)$?

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, 30.05.2012, bis 11:00 im Briefkasten