TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Sommersemester 2012
Blatt 4
(14.05.2012)

Hausaufgaben

4.1. Ableitungen von Matrixfunktionen

Man bestimme die Richtungsableitungen der folgenden Matrixfunktionen und beweise die Differenzierbarkeit im Punkt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) $f(A) = O^{\mathrm{T}} A O$, $O \in \mathbf{O}(n)$.

(b) $\mathrm{inv}(A) = A^{-1}$, $A \in \mathbf{GL}(n)$. Hinweis: $\mathrm{inv} : \mathbf{GL}(n) \to \mathbf{GL}(n)$ ist stetig.

4.2. Gegenbeispiel zur Differenzierbarkeit

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, 0) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{y^4} e^{-\frac{x^2}{y^4}}$.

(a) Skizzieren Sie $x \mapsto f(x, 1)$ und die Höhenlinien von f.

(b) $\tilde{A}(v) := \partial_v f(0, 0)$ existiert für alle $v \in \mathbb{R}^2$ und $\tilde{A}$ ist linear. Hinweis: $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} = 0$.

(c) f ist nicht stetig, also auch nicht differenzierbar.

(d) Für $g(x, y) = y f(x, y)$ existieren auch alle Richtungsableitungen im Ursprung und ergeben eine lineare Funktion.

(e) g ist stetig aber nicht differenzierbar im Ursprung.

4.3. Produktregel

Bestimmen Sie die Ableitung von $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v(x) = f(x) w(x)$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, in x_0 als lineare Abbildung und als Matrix.

4.4. Beispiele für Ableitungen

Geben Sie die Ableitung der folgenden Funktionen im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jeweils als lineare Abbildung und als Matrix an:

(a) $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\|\cdot\|(x) = \|x\|$,

(b) $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(x) = \frac{1}{\|x\|^7}$,

(c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$,

(d) $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = a \times x$, $a \in \mathbb{R}^3$.

4.5. Kugelkoordinaten

Sei $\Phi : \mathbb{R}^+ \times (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$. Φ beschreibt die Transformation auf Kugelkoordinaten. Warum ist Φ differenzierbar?

(a) Berechnen Sie die Ableitung $\Phi'(r, \vartheta, \varphi)$ als Matrix (Jakobi-Matrix).

(b) Zeigen Sie: die drei Vektorfelder

$$
\begin{aligned}
v_r &: \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \qquad & v_r(\Phi(r, \vartheta, \varphi)) &:= \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \vartheta, \varphi), \\
v_\vartheta &: \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \qquad & v_\vartheta(\Phi(r, \vartheta, \varphi)) &:= \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}(r, \vartheta, \varphi), \\
v_\varphi &: \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \qquad & v_\varphi(\Phi(r, \vartheta, \varphi)) &:= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(r, \vartheta, \varphi),
\end{aligned}
$$

sind wohldefiniert und stehen in jedem Punkt senkrecht aufeinander.

Abgabe der Hausaufgaben: 21.05.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung