TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Sommersemester 2012
Blatt 3
(07.05.2012)

Hausaufgaben

3.1. Quotiententopologien

Zeigen Sie durch Angabe eines Homöomorphismus, dass gilt

(a) $\mathrm{P}\mathbb{R}^1 \simeq S^1$, (b) $S^1 \times S^1 \simeq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$ mit $0 < r < R$.

3.2. Einige Topologische Eigenschaften von Matrixgruppen

Der Raum der reellen $n \times n$ Matrizen, $\mathbb{R}^{n\times n}$, ist mit der submultiplikativen Matrixnorm $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \,|\, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ ein Banachraum. Zeigen Sie

(a) Die Gruppe $\mathbf{GL}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} |\, A \text{ ist invertierbar}\}$ ist offen und dicht in $\mathbb{R}^{n\times n}$.
HINWEIS: Sei $\det A = 0$. Für welche $\epsilon \in \mathbb{R}$ ist $A + \epsilon E$ invertierbar?

(b) Die Gruppe $\mathbf{SL}(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n) |\, \det A = 1\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(c) $\mathbf{O}(3) = \{B \in \mathbb{R}^{3\times 3} |\, B \text{ ist orthogonal}\}$ ist kompakt und nicht zusammenhängend.

(d) $\mathbf{SO}(3) = \{B \in \mathbf{O}(3) |\, \det B = 1\}$ ist kompakt und zusammenhängend.
HINWEIS: Man zeige wegzusammenhängend.

3.3. Anwendung des Newtonverfahrens

Zu einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f'(x_0) \neq 0$ definiert das Newtonverfahren zum Startwert $x_1 \in \mathbb{R}$ rekursiv die Folge $x_{n+1} := F(x_n)$ mit $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

(a) Sei $f(x) = x^2 - 3$. Für welche Startwerte $x_1 \in \mathbb{R}$ können Sie aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes die Konvergenz des Newtonverfahrens gegen $x_0 = \sqrt{3}$ erwarten? Konvergiert der Startwert $x_1 = 1$?

(b) Berechnen Sie eine Nullstelle von $f(x) = 1 + x - x^3$ durch das Newtonverfahren mit Startwert $x_1 = 1$ auf 16 Stellen genau. Wie viele Iterierte müssen Sie berechnen? Warum gibt es keine weiteren Nullstellen?

(c) Zeigen Sie im Bereich der Gültigkeit des Banachschen Fixpunktsatzes für F gilt $|x_{n+1} - x_0| \leq C|x_n - x_0|^2$ für festes $C > 0$. Wie verbessert sich also in etwa die Anzahl der gültigen Dezimalstellen pro Iterationsschritt?

3.4. Stetige Fortsetzbarkeit

Untersuchen Sie die stetige Fortsetzbarkeit von $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ im Ursprung und gegebenfalls die Differenzierbarkeit im Ursprung der stetigen Fortsetzung für

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, (b) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (c) $f(x, y) = xy$.

3.5. Die Ableitung linearer und quadratischer Funktionen

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle v, x\rangle + c$, $v \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung $f'(x_0)(x) = \langle v, x\rangle$, kurz $f'(x_0) = v^{\mathrm{T}}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, Ax\rangle$, $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung $f'(x_0)(x) = 2\langle Ax_0, x\rangle$, kurz $f'(x_0) = 2(Ax_0)^{\mathrm{T}}$.

Abgabe der Hausaufgaben: 14.05.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung