TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2012S

Sommersemester 2012
Blatt 1
(23.04.2012)

Hausaufgaben

1. Beispiele für Inneres, Abschluss und Rand

Geben Sie jeweils Inneres, Abschluss und Rand für folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ mit euklidischer Metrik an und begründen Sie falls nötig.

(a) $[0,1)^2$, (b) $[0,\infty)^2$, (c) $\mathbb{R}\times\{0\}$, (d) $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$,

(e) $\{x\in\mathbb{R}^2|\,\|x\|\in[0,1]\cup([1,2]\cap\mathbb{Q})\}$, (f) $\{(x,\sin\frac{1}{x})|x\in\mathbb{R}^+\}$.

2. Eigenschaften stetiger Bilder und Urbilder

Geben Sie jeweils ein (möglichst einfaches) Beispiel an für eine stetige Abbildung $f:M\to N$ zwischen den topologischen Räumen M,N und

(a) eine offene Menge $O\subseteq M$, deren Bild nicht offen ist,
(b) eine abgeschlossene Menge $A\subseteq M$, deren Bild nicht abgeschlossen ist,
(c) eine kompakte Menge $K\subseteq N$, deren Urbild nicht kompakt ist,
(d) eine zusammenhängende Menge $Z\subseteq N$, deren Urbild nicht zusammenhängend ist.

3. Unstetigkeit der Umkehrfunktion

Seien M,N metrische Räume. Ist $f:M\to N$ stetig und bijektiv und M kompakt, so ist f^{-1} stetig. Ist M nicht kompakt, gibt es Gegenbeispiele:

(a) Man gebe eine stetige bijektive Funktion von $(-\pi,\pi]$ nach $S^1=\{z\in\mathbb{C}|\,|z|=1\}\subseteq\mathbb{C}$ an, deren Umkehrabbildung nicht stetig ist.
(b) Man gebe eine stetige bijektive Funktion von $(-\pi,2\pi)$ auf eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, deren Umkehrabbildung nicht stetig ist. Hinweis: Man denke an eine gezeichnete 6.

4. Die stereographische Projektion der Einheitssphäre

Sei $S^2:=\{x\in\mathbb{R}^3|\,\|x\|=1\}$ die 2-dimensionale Einheitssphäre. Gegeben ist die Funktion $\tilde{f}:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z>-1\}\to\mathbb{R}^2$, $(x,y,z)\mapsto\frac{1}{1+z}(x,y)$.

(a) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass $\tilde{f}$ den Punkt (x,y,z) entlang der Geraden durch den Punkt $(0,0,-1)$ auf die xy-Ebene projiziert.
(b) Warum ist $f:=\tilde{f}|_{S^2}$ stetig?
(c) Zeigen Sie das $g:\mathbb{R}^2\to S^2\setminus\{(0,0,-1)\}$, $g(u,v)=\frac{(2u,2v,1-u^2-v^2)}{1+u^2+v^2}$ die Umkehrabbildung von f ist.
(d) Folgern Sie: die punktierte Sphäre $S^2\setminus\{(0,0,-1)\}$ ist homöomorph zur Ebene $\mathbb{R}^2$.

5. Erweiterung der natürlichen Zahlen

Sei $\widehat{\mathbb{N}}:=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ und $\mathcal{O}:=\{A\subseteq\widehat{N}\,|\,\infty\in A\Rightarrow\exists n\in\mathbb{N}:\mathbb{N}+n\subseteq A\}$.

(a) $(\widehat{\mathbb{N}},\mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum.
(b) Charakterisieren Sie in Worten die abgeschlossenen Mengen in $\widehat{\mathbb{N}}$.
(c) $(\widehat{\mathbb{N}},\mathcal{O})$ ist ein Hausdorff-Raum.
(d) Die Funktion $f:\widehat{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$, $f(n)=\frac{1}{n}$ falls $n\in\mathbb{N}$, $f(\infty)=0$, ist stetig.
(e) $\tilde{f}:\widehat{\mathbb{N}}\to f(\widehat{\mathbb{N}})$ ist ein Homöomorphismus.

Abgabe der Hausaufgaben: 30.04.2012, bis 12:00 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung
Schreiben Sie bitte Blattnummer und Ihre Tutorgruppe deutlich auf Ihre Lösungen.