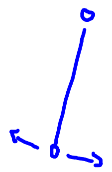
Untermannigfaltigkeiten („Hyperflächen" im $\mathbb{R}^n$)

Physik: holonome Zwangsbedingungen & Erhaltungssätze reduzieren die Zahl der „unabh. Freiheitsgrade"

Bsp.: Pendel



$x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\| = r$ konstant

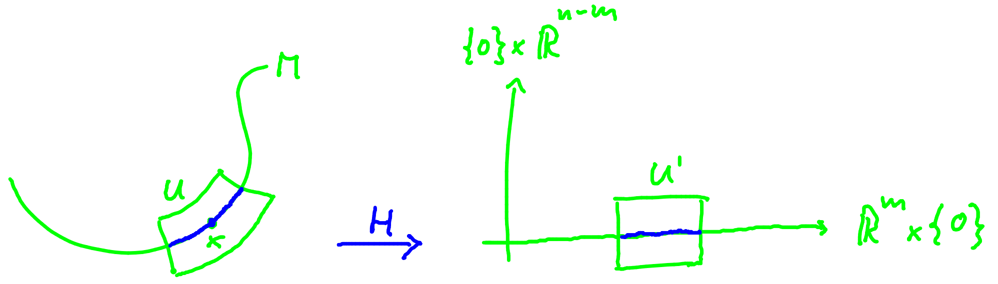
$\rightarrow$ zwei „Freiheitsgrade"

Allgemein: Gibt es für eine Beschreibung im $\mathbb{R}^n$, m „unabh. Freiheitsgrade", hat man es typischerweise mit einer m-dimensionalen „Untermannigfaltigkeit" $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zu tun.

Def.: • $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit" von $\mathbb{R}^n$, wenn es um jedes $x \in M$ eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung U und einen C^k-Diffeomorphismus $H: U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$H(M \cap U) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U'$$

• H heißt dann „äußere Karte" für M um x. („Flachmacher")



• Mit $V := M \cap U$ und V' so dass $V' \times \{0\} = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap U'$ definieren wir $h: V \to V'$ durch $H\big|_{M \cap U}(x) =: h(x) \times \{0\}$

h heißt dann „innere Karte" für M um x.

• $n-m$ heißt „Kodimension" von M

Bsp.:
- Jeder m-dimensionale affine Teilraum $A = a + R \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, $R \subseteq \mathbb{R}^n$ —"— Untervektorraum, ist m-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit.
- n-dim. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind genau die offenen Teilmengen im $\mathbb{R}^n$.
- 0-dim. Untermannigfaltigkeiten bestehen aus isolierten Punkten
- Sind $M_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ m_i-dimensionale Untermannigfaltigkeiten, so ist $M_1 \times M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ eine (m_1+m_2)-dim. Unterman..

Def.: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$ diff.bar bei $x \in U$.
- x heißt „regulärer Punkt" wenn $f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist und „kritischer Punkt" wenn $f'(x)$ nicht surjektiv ist.
  ↳ (synonym: „singulärer Punkt")
- $f(x)$ heißt „kritischer Wert" falls x kritischer Punkt ist, und y heißt „regulärer Wert" falls $f^{-1}(\{y\})$ nur reguläre Punkte enthält. (bzw. leer ist)

Bem:
- Für $m \leq n$ sind reguläre Punkte der „Normalfall".
- Für $m > n$ gibt es keine.
- $f^{-1}(\{y\})$ sind alle $x \in \mathbb{R}^n$, die die „holon. Zwangsbedingungen"

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= y_m \end{aligned}$$

erfüllen.

Satz: (Satz vom regulären Wert)

Ist y ein regulärer Wert von $f \in C^l(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, $l \geq 1$. Dann ist $M := f^{-1}(\{y\})$ eine C^l-Untermannigfaltigkeit mit Kodim. k.

Beweis: Sei $x_0 \in f^{-1}(\{y\})$, $g : U \to \mathbb{R}^k$, $g(x) := f(x) - y$. Dann ist

$M = \{ x \in U \mid g(x) = 0 \}$ und $\mathrm{Rang}(g'(x_0)) = \mathrm{Rang}(f'(x_0)) = k$.

D.h. nach geeigneter Umordnung der Koordinaten x_j gilt

$$\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1..k} \neq 0 .$$

Damit hat die Abb. $H : U \to \mathbb{R}^n$, $H(x) := (g_1(x), \dots, g_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n)$ eine Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1..n} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)} \\ \hline 0 & \mathbb{1} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \} \ k \text{ Zeilen} \\ \} \ n-k \end{array} \\ \underbrace{\qquad}_{k} \ \underbrace{\qquad}_{n-k} & \end{array}$$

mit vollem Rang. D.h. $H'(x_0)$ ist Isomorphismus & nach dem Umkehrsatz H ein lokaler C^l-Diffeomorphismus. Außerdem gilt

$$M = H^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) .$$

□

Korollar: Seg. $b \in \mathbb{R}$, $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Ax \rangle = b \}$.

M ist C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Kodimension 1

wenn $b \neq 0$.

Beweis: $f(x) := \langle x, Ax \rangle - b \Rightarrow M = f^{-1}(\{0\}) \wedge f'(x)h = 2\langle x, Ah \rangle$

$f'(x)$ ist surjektiv wenn $x^T A \neq 0$ was durch

$x^T A x = b$ durch $b \neq 0$ gewährleistet ist.

□

Bsp 1: Die Sphäre $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $(n-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit

Beweis: setze $A = \mathbb{1}$, $b = 1$. $\square$

Bsp 2: (Freiheitsgrade eines „Stabes") $\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|x-y\| = r\}$

ist für $r > 0$ 5-dim. Untermannigfaltigkeit.

Beweis: setze $A = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $b = r^2$. $\square$

Bsp 3: Die orthogonale Gruppe $O(n) := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^T X = \mathbb{1}\}$ ist eine $\frac{1}{2}n(n-1)$ dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Beweis: $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_s^{n\times n} := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = X^T\}$

isomorph zu $\mathbb{R}^k$, $k = \underbrace{\frac{n^2-n}{2}}_{\text{Off-diagonale}} + \underbrace{n}_{\text{Diagonal-elemente}} = \frac{1}{2}n(n+1)$

$f(X) := X^T X$

wir zeigen: $\mathbb{1}$ ist regulärer Wert von f,

d.h. $f'(X)$ ist surjektiv $\forall X: f(X) = \mathbb{1}$:

$f'(X)\Delta = \Delta^T X + X^T \Delta \overset{!}{=} A \in \mathbb{R}_s^{n\times n}$

wird erreicht für $\Delta = \frac{1}{2} X A$ ✓

also ist $f^{-1}(\{\mathbb{1}\}) = O(n)$ U.M. von $\mathbb{R}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$

der Dimension $n^2 - k = \frac{1}{2}n(n-1)$. $\square$

Bsp. 4: Die „Lorentzgruppe" $O(3,1) := \{X \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid X \mu X^T = \mu\}$ mit der Diagonalmatrix $\mu = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ ist eine 6-dim. C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

Beweis: $\to$ Übung, die 6 Freiheitsgrade entsprechen 3 für Rotation im Raum + 3 für einen „boost".