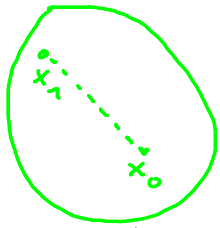
Konvexität & Legendre-Transformation

Erinnerung...

Def.:
- Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $X \subseteq V$ heißt „konvex" g.d.w. für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt $x_0, x_1 \in X \Rightarrow x_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda) x_0 \in X$
- Sei $X \subseteq V$ konvex. $f: X \to \mathbb{R}$ heißt „konvex" g.d.w.



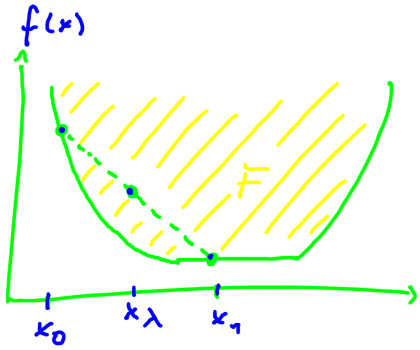
$$\forall \lambda \in [0,1]\, \forall x_0, x_1 \in X: \; f(x_\lambda) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_0)$$

f heißt „strikt konvex", g.d.w. "$<$" gilt falls $x_\lambda \notin \{x_0, x_1\}$.

Bem.:
- Die Funktion f ist konvex g.d.w. der „Epigraph" $F \subseteq \mathbb{R} \times V$

  $F := \{(y,x) \mid y \geq f(x)\}$ als

  Menge konvex ist.



- Ist $f: X \to \mathbb{R}$ konvex, so ist f stetig auf dem relativen Inneren von X.
- $f \in C^2(X \subseteq \mathbb{R}^n)$ ist konvex g.d.w. $H_f(x) \geq 0 \;\forall x \in X$ und strikt konvex wenn $H_f(x) > 0 \;\forall x \in X$ (H_f = Hessematrix)

Satz: [Gradientenungl.] Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex & offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ konvex. Dann gilt $\forall x, y \in X$: $\boxed{f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)}$

Beweis: Aus Konvexität folgt für $\lambda \in (0,1]$: $f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)$

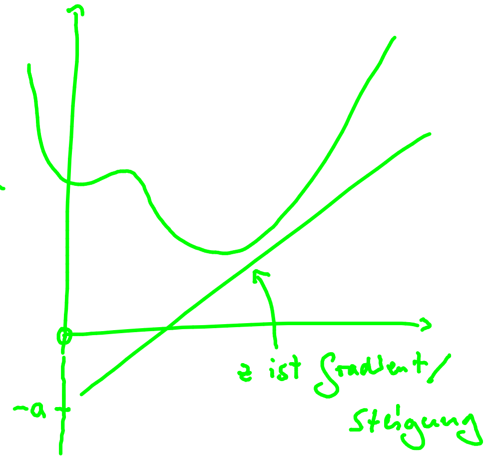
also $$\frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$ und mit $\lambda \to 0$ die Behauptung. $\square$

Korollar: Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ und $f'(x) = 0$, dann ist $\inf_y f(y) = f(x)$ globales Minimum.

Def.: Sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die „Legendre-Fenchel Transformierte" $f^*:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, ist definiert als

$$f^*(z) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\langle z,x\rangle - f(x)\right)$$

Korollar: $a \geq f^*(z) \Rightarrow \forall x: \underbrace{\langle z,x\rangle - a}_{\text{affine Funktion } x\mapsto \langle z,x\rangle - a} \leq f(x)$



Satz: f^* ist konvex.

Beweis: Sei $z_\lambda := \lambda z_1 + (1-\lambda) z_0$, $\lambda\in[0,1]$

$$\begin{aligned} f^*(z_\lambda) &= \sup_x \left(\lambda \langle z_1,x\rangle + (1-\lambda)\langle z_0,x\rangle - f(x) \right) \\ &\leq \sup_x \lambda \left(\langle z_1,x\rangle - f(x)\right) + \sup_{x'} (1-\lambda)\left(\langle z_0,x'\rangle - f(x')\right) \\ &= \lambda f^*(z_1) + (1-\lambda) f^*(z_0) \end{aligned}$$

$\square$

Dies impliziert $\left(f^*:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \Rightarrow f^* \text{ stetig} \right)$

Bsp.: $f(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $x\in\mathbb{R}$, $p\in(1,\infty)$

$f^*(z) = \frac{|z|^q}{q}$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Beweis: $f(x)$ konvex $\Rightarrow g(x) := xz - f(x)$ konkav

$g'(x) = z - |x|^{p-1}\operatorname{sgn}(x) \overset{!}{=} 0$

also $x \overset{!}{=} \operatorname{sgn}(z)\,|z|^{\frac{1}{p-1}}$ und damit

$$\begin{aligned} f^*(z) &= \langle x,z\rangle - f(x) \\ &= |z|^{\frac{1}{p-1}+1} - \frac{1}{p}|z|^{\frac{p}{p-1}} = \left(1-\frac{1}{p}\right)|z|^{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}} \\ &= \frac{1}{q}|z|^q \end{aligned}$$

$\square$

Satz: [Fenchel-Young Ungleichung] Für $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x,z\in\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{f(x)+f^*(z) \geq \langle z,x\rangle} \quad (*)$$

Ist f zudem konvex und diff.bar, dann gilt '=' in $(*)$ wenn $\boxed{z=\nabla f(x)}$.

Beweis: $(*)$ folgt aus $f^*(z) = \sup_x \langle z,x\rangle - f(x) \geq \langle z,x\rangle - f(x)$.

Sei f nun C^1 und konvex. Dann ist $g(x):=\langle z,x\rangle - f(x)$ C^1 und konkav. D.h. $\nabla g(x)=0 \Rightarrow g$ hat bei x globales Max.

Wegen $\nabla g(x) = z-\nabla f(x)$ übersetzt sich dies in

$$z=\nabla f(x) \Rightarrow f^* = \langle z,x\rangle - f(x)$$

$\square$

Beispiel: ∘ für $p,q\in(1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und $x,z\in\mathbb{R}$ gilt dann

$$\boxed{\frac{|x|^p}{p}+\frac{|z|^q}{q} \geq xz} \quad (**)$$

Korollar: [Hölder-Ungl.] $\forall x,z\in\mathbb{R}^n$: $\boxed{\sum_i |x_i z_i| \leq \underbrace{\left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}}_{=:\|x\|_p}\left(\sum_j |z_j|^q\right)^{1/q}}$.

Beweis: O.B.d.A. $\|x\|_p=\|z\|_q=1$ wegen Homogenität.

Dann ist $\sum_i |x_i z_i| \overset{(**)}{\leq} \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $\square$

Bsp.: $f(x)=\frac{1}{2}\langle x,Ax\rangle$ mit $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A>0$.

$f^*(z)=\frac{1}{2}\langle z,A^{-1}z\rangle$

Beweis: $f\in C^1$ & konvex, $f^*(z)=\sup_x \overbrace{\langle z,x\rangle - f(x)}^{=:g(x)}$

$$\nabla g(x) = z-\nabla f(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow z \overset{!}{=} \nabla f(x) = Ax \Leftrightarrow x = A^{-1}z$$

$$f^*(z) = \langle z,A^{-1}z\rangle - \frac{1}{2}\langle z,A^{-1}AA^{-1}z\rangle = \frac{1}{2}\langle z,A^{-1}z\rangle$$ $\square$

Satz: Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, dann gilt $f^{**} = f$.

Beweis:

$$f^{**}(x) = \sup_z \langle x,z\rangle - f^*(z)$$

$$= \sup_z \sup_{a \geq f^*(z)} \left(\langle x,z\rangle - a \right)$$

= sup. über alle affinen Funktionen g für die gilt $g \leq f$

$$= f(x)$$

da wir einfach die Tangente am Punkt x nehmen können & für die gilt $g(x) = f(x)$ $\square$

Def.: Wenn $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ konvex ist und für alle $z \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung $\nabla f(x) = z$ existiert, dann heißt

$$\boxed{f^*(z) = \langle x(z), z\rangle - f(x(z))} \quad \text{mit} \quad \nabla f(x(z)) \overset{!}{=} z$$

die „Legendretransformierte" von f.

Bsp.: • Sei $L(t,x,v)$ eine Lagrangefkt., so dass $f: v \mapsto L(t,x,v)$ die Bedingungen erfüllt, dann gilt

$$f^*(p) = \langle v(p), p\rangle - L(t,x,v(p)) =: \overbrace{H(t,x,p)}^{\text{„Hamilton Funktion"}}$$

wobei $v(p)$ durch $p \overset{!}{=} \nabla f(v(p))$ gegeben ist.