Bemerkungen zu Lagrange Multiplikatoren:

- Regularität bedeutet, dass $\{\nabla g_i(x)\}_{i=1}^{k}$ lin. unabh. für alle $x: g(x)=0$
- –"– impliziert Eindeutigkeit der Lagrange-Multiplikatoren:

  angenommen $\nabla f(x) = \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) = \sum_i \tilde{\lambda}_i \nabla g_i(x)$

  dann ist $\sum_i (\lambda_i - \tilde{\lambda}_i) \nabla g_i(x) = 0 \Rightarrow \lambda_i = \tilde{\lambda}_i \ \forall i$

„Lösungsrezept" für das Auffinden von Extrema unter Nebenbed.:

- Löse die $k+n$ Gleichungen

$$\nabla f(x) = \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x)$$

$$g(x) = 0$$

  nach den $k+n$ Variablen (λ, x) auf.

  (keine Garantie, dass dies klappt)

  $\rightarrow$ Kandidaten für mögl. Extrema

- Betrachte folgende Punkte separat:
  - Kritische Punkte
  - Punkte ohne Diff.barkeit
  - Punkte am Rand

- Bestimme Min./Max. unter den Kandidaten

  Rechtfertige Existenz von Min./Max. ggfs. durch Kompaktheitsargument (ggfs. durch Einschränken / Erweitern des Def.bereichs)

Bsp.: Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f(x) = \langle x, Ax\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Bestimme $\sup\limits_{x\in S^{n-1}} f(x) \overset{\uparrow}{=} \max\limits_{x\in S^{n-1}} f(x)$

S^{n-1} kompakt

$g(x) := \langle x, x\rangle - 1 \Rightarrow \nabla g(x) = 2x \neq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}$

$\Rightarrow$ Regularität ✓

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ \quad \| \qquad\qquad \| \\ 2Ax \qquad\quad 2\lambda x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$A = A^T$

d.h. die Kandidaten sind wegen $Ax = \lambda x$ die Eigenvektoren von A & wegen $\langle x, Ax\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \overset{\uparrow}{=} \lambda$ ist

$x \in S^{n-1}$

$\max\limits_{x\in S^{n-1}} f(x) = \lambda_{max}$ größter Eigenwert von A.

Bsp.: Auf $\Sigma_n := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1 \wedge \forall i: p_i \geq 0\}$ ist die „Entropie" definiert durch $S(p) := -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$

Bestimme $\sup\limits_{p\in\Sigma_n} S(p) = ?$

Dazu definiere $U_n := \overset{\circ}{\Sigma}_n$ als das Innere von Σ_n & betrachte zunächst $S|_{U_n} : U_n \to \mathbb{R}$.

Die Nebenbedingung ist geg. durch $0 \overset{!}{=} g(p) := \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) - 1$

$\Rightarrow \nabla g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Regularität ✓

$\tilde{p} \in U_n$ extremal $\Rightarrow \nabla S(\tilde{p}) = \lambda \nabla g(\tilde{p})$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$

Mit $(\nabla S(\tilde{p}))_i = -(\log \tilde{p}_i) - 1$ bedeutet dies

$\lambda + 1 + \log \tilde{p}_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow \tilde{p}_i =$ konstant

$\Rightarrow \tilde{p}_i = \frac{1}{n}$.

$\sum_i^n \tilde{p}_i = 1$

Da $\Sigma_n = U_n \cup \partial\Sigma_n$ kompakt ist, existiert ein Max.

Angenommen dies ist bei $\hat{p}$ mit $\hat{p} = (\underbrace{\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m}_{\in U_m,\ m \le n}, 0, \dots, 0)$,

dann gilt $\max\limits_{p \in \Sigma_m} S(p) = \max\limits_{p \in U_m} S(p) = S(\hat{p}) = -\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = \log m$.

Da $\log n \geq \log m$, muss also $m = n$ und so $\hat{p} = \tilde{p}$.

$$\Rightarrow \boxed{\max_{p \in \Sigma_n} S(p) = \log n}$$