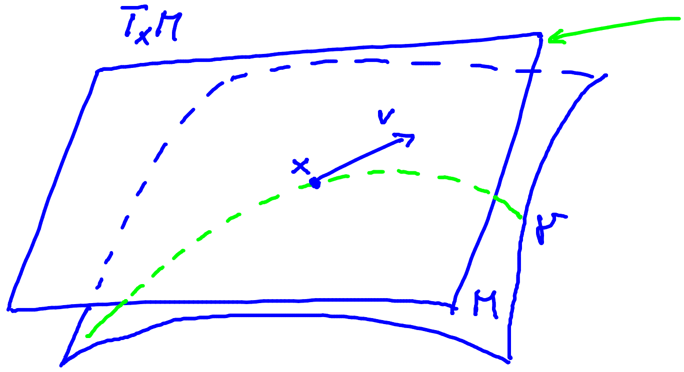
Tangentialräume



genau genommen ist das der „affine Tangentialraum" $x + T_x M$

Def.: • Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^l-U.M. der Dimension m, $l \geq 1$.
Ein „<u>Tangentialvektor</u>" an M im Punkt $x \in M$ ist ein Vektor $v = \dot{\gamma}(0)$ wobei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\varepsilon > 0$ eine stetig diff.bare Kurve mit $\gamma(0) = x$ ist.

• Die Menge $T_x M$ aller Tangentialvektoren an M in x heißt „<u>Tangentialraum</u>"

Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine C^1-U.M. der Dimension m und $x \in M$.

(1) $T_x M$ ist ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(2) Ist $h : V \subseteq M \to V' \subseteq \mathbb{R}^m$ eine innere Karte für M um $x \in M$, dann gilt

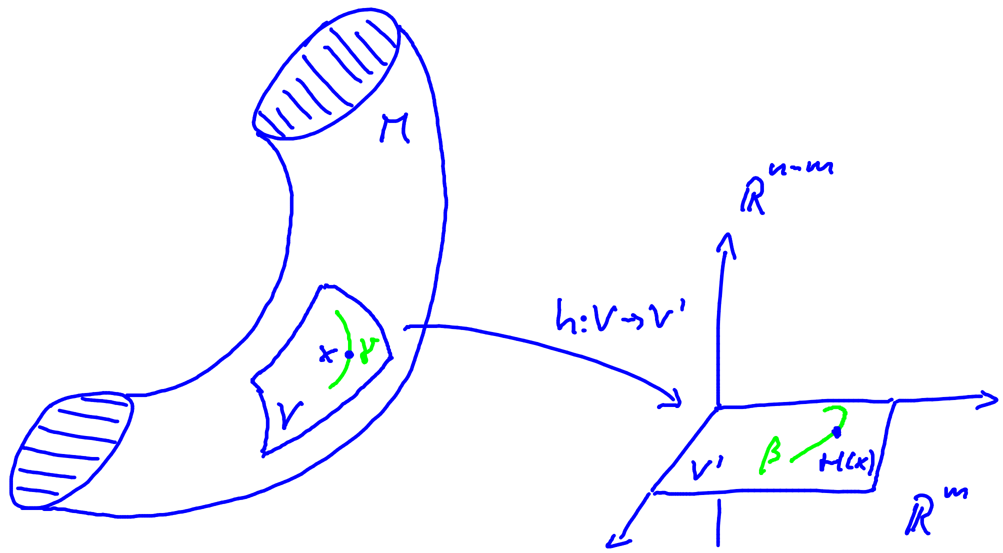
$$\boxed{T_x M = h^{-1\,\prime}(h(x))\, \mathbb{R}^m}$$

(3) Ist $M = f^{-1}(\{y\})$ Urbild eines regulären Wertes y von $f \in C^1(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$, dann gilt

$$\boxed{T_x M = \operatorname{kern}\left[f'(x)\right]} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid f'(x) v = 0 \right\}.$$

<u>Beweis:</u> Es gilt $T_x\left(\left(\mathbb{R}^m \times \{0\}\right) \cap U'\right) = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ (1)

Der allgemeine Fall folgt dann durch Verwendung einer äußeren Karte $H: U \to U'$



$H: U \to U'$

$V = M \cap U$

$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$

$\gamma(0) = x$

$\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \to V' \times \{0\}$

$\beta := H \circ \gamma$

Für die Tangentialvektoren gilt nach der Kettenregel

$\dot\beta(0) = H'(x)\,\dot\gamma(0)$ also $\dot\gamma(0) = [H'(x)]^{-1}\dot\beta(0)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $T_x M = [H'(x)]^{-1}\left(\mathbb{R}^m \times \{0\}\right) \Rightarrow (1)$ $\boxed{1}$

$= H^{-1\,\prime}(H(x))\left(\mathbb{R}^m \times \{0\}\right)$

$= h^{-1\,\prime}(h(x))\,\mathbb{R}^m \Rightarrow (2)$

Erinnerung:

$H|_V(x) = h(x) \times \{0\}$

$H^{-1}|_{V' \times \{0\}}(H(x)) = h^{-1}(h(x))$

Für (3): $f \circ \gamma = y \Rightarrow f'(x)\dot\gamma(0) = 0$ $\boxed{2}$

und damit $T_x M \subseteq \operatorname{Kern}[f'(x)]$.

Da $f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ surjektiv, ist

$\dim \operatorname{Kern}[f'(x)] = m = \dim T_x M$

$\Rightarrow T_x M = \operatorname{Kern}[f'(x)]$ $\boxed{3}$

Bemerkungen: • Ist $\mathbb{R}^m \supseteq V' \xrightarrow{h^{-1}(y)} V \subseteq M$, dann ergibt sich der Tangentialraum durch die lineare Approximation:

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{h^{-1\,\prime}(y)} T_xM \quad \text{wobei } y = h(x)$$

• $T_xM = \ker\left[f'(x)\right]$ ist wegen $f'(x) = \begin{pmatrix}\nabla f_1(x)^T\\ \vdots \\ \nabla f_k(x)^T\end{pmatrix}$

gleichbedeutend mit

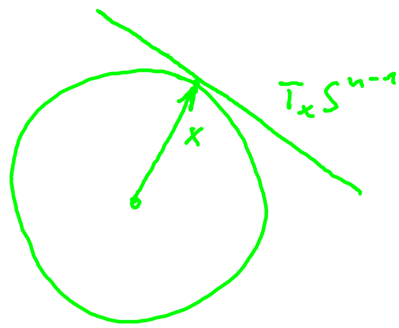
$$\boxed{T_xM = \left\{\nabla f_i(x)\right\}_{i=1..k}^{\perp}}, \quad k = n-m$$

d.h. Tangentialvektoren & Gradienten spannen orthogonale Räume auf.

Bsp.: ① Einheitssphäre $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$S^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) := \langle x,x\rangle - 1 = 0\right\}$$

$$\nabla f(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad T_xM = \left\{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle x,v\rangle = 0\right\}$$



② Orthogonale Gruppe $M = O(n)$

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid f(X) := X^TX = \mathbb{1}\right\}$$

$$T_{\mathbb{1}}M = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = -A\right\}$$

da $f'(\mathbb{1})A = A + A^T \overset{!}{=} 0$ für $A \in T_{\mathbb{1}}M$.

Tatsächlich gilt $A \in T_{\mathbb{1}}M \Rightarrow e^A \in M$ für $M = O(n)$

und $X \in SO(n) \Rightarrow \exists A \in T_{\mathbb{1}}M: X = e^A$

Extrema unter Nebenbedingungen

Problemstellung: Gegeben: $f \in C^1(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$

Gesucht: Extrema von f auf $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$

also $\sup_{x \in M} f(x)$ oder $\inf_{x \in M} f(x)$

für $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir außer $f(\bar{u})$ nur die stationären Punkte $\{x \mid \nabla f(x) = 0\}$ zu untersuchen. Allgemein gilt:

Satz: Sei 0 ein regulärer Wert von g. Ist x_0 Extremalpunkt von f auf M, dann ist $\nabla f(x_0)$ eine Linearkombination von $\{\nabla g_i(x_0)\}_{i=1}^k$. D.h. es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (sogenannte „Lagrange Multiplikatoren"), so dass

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(x_0)}$$

Beweis: Für jedes $v \in T_{x_0}M$ gibt es eine C^1-Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

x_0 Extremalpunkt $\Rightarrow$ $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)$ hat bei $t = 0$ lokales Extremum

$$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} (f \circ \gamma)'(0) = f'(x_0)\,\dot{\gamma}(0)$$
$$= \langle \nabla f(x_0), v \rangle \quad \forall v \in T_{x_0}M$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) \perp T_{x_0}M \Rightarrow \nabla f(x_0) \in \operatorname{span}\{\nabla g_i(x_0)\}_{i=1}^k$$

$T_{x_0}M = \{\nabla g_i(x_0)\}_{i=1}^{k\,\perp}$

$\square$