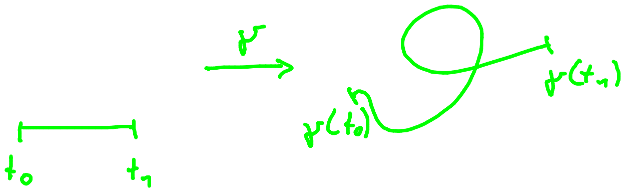
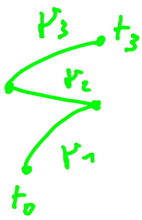
Kurven



Def.:

- Eine „C^k-Kurve" ist im Folgenden eine Abbildung $\gamma \in C^k(I, U)$ mit $I := [t_0, t_1] \in \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$.



- Durch Zusammenstückung von C^k-Kurven $\gamma_i \in C^k([t_{i-1}, t_i], U)$ entsteht eine Kurve „$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$" die „stückweise C^k" ist.

- γ heißt „geschlossen", wenn $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

- γ heißt „regulär", wenn $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

  ($\dot{\gamma}(t)$ kann als „Geschw.vektor" interpretiert werden)

- $L(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \| \dot{\gamma}(t) \| \, dt$ heißt die „Länge" der Kurve

- $s : I \to [0, L(\gamma)]$, $s(t) := \int_{t_0}^{t} \| \dot{\gamma}(\tau) \| \, d\tau$ heißt „Bogenlänge"

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{s}(t) = \| \dot{\gamma}(t) \|} \qquad (\text{da } \dot{s}(t) > 0)$$

$\Rightarrow$ für reguläre Kurven ist $s(t)$ umkehrbar

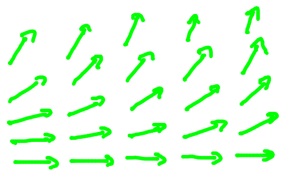
- Ist $\varphi := s^{-1}$, dann heißt $\Gamma : \gamma \circ \varphi$ die „auf Bogenlänge umparametrisierte Kurve"

$$\Rightarrow \quad \| \dot{\Gamma}(s) \| \underset{\text{Kettenregel}}{=} \| \dot{\gamma}(t) \| \, | \dot{\varphi}(s) | \underset{\text{Umkehrregel}}{=} 1$$

Umkehrregel: $|\dot{\varphi}(s)| = \frac{1}{|\dot{s}(t)|}$

d.h. Γ ist Kurve mit „Einheitsgeschw." wofür man meist „s" anstatt „t" verwendet.

Kurvenintegrale & Vektorfelder



Def.: • $F \in C^k(U,\mathbb{R}^n)$ heißt „C^k-Vektorfeld" auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Bsp.: Geschw.feld einer Strömung

• Ist $f \in C^{k+1}(U,\mathbb{R})$, dann heißt $F: x \mapsto \nabla f(x)$ „Gradientenfeld"

Bsp.: • Gravitationsfeld, elektr. Feld einer Punktladung, etc.

• $F(x) = F$ = konstant $\Rightarrow$ $F = \nabla f(x)$ mit $f(x) = \sum_i F_i x_i$.

Neben Kurvenintegralen „skalarer" Funktionen $f \in C(U,\mathbb{R})$ der Form

$$\underbrace{\int_\gamma f(r)\,ds}_{\text{„Bogenlängenintegral"}} := \int_{s_0}^{s_1} f(r(s))\,ds = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\underbrace{\|\dot\gamma(t)\|}_{=\frac{ds}{dt}(t)}\,dt\,, \quad r(s) = \Gamma(s)$$

interessieren uns v.a. zwei Formen, die Vektorfelder involvieren:

Def.: • Ist $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und die Kurve $\gamma \in C^1$, so definiert man das Kurvenintegral von F entlang γ als

Skalarprodukt

$$\boxed{\int_\gamma F(r)\cdot dr := \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt} \in \mathbb{R}$$

Kraftfeld Geschw.vektor

$\Rightarrow \int_\gamma F(r)dr$ ist „Arbeit" entlang γ

• und für $n=3$:

$$\boxed{\int_\gamma F(r)\times dr := \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))\times\dot\gamma(t)\,dt} \in \mathbb{R}^3$$

Kreuzprodukt

- Ist $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ und $\gamma_i \in C^1$, dann definieren wir

$$\boxed{\int_\gamma \ldots := \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \ldots}$$

- Ist die Kurve γ geschlossen, macht man dies oft durch „$\oint_\gamma$" kenntlich.

__Satz:__ Sei $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld, $\gamma \in C^1(I, U)$ und $\gamma' \in C^1(I', U)$ Kurven, so dass $\gamma = \gamma' \circ f$ für $f \in C^1(I, I')$ mit $f(t_0) = t_0'$, $f(t_1) = t_1'$ für die Randpunkte der Intervalle I, I'.
Dann gilt

$$\int_\gamma F(r)\cdot dr = \int_{\gamma'} F(r)\cdot dr$$

__Beweis:__

$$\int_\gamma F(r)\cdot dr = \int_I F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_I F(\gamma'\circ f(t))\cdot\dot\gamma'(f(t))\,\dot f(t)\,dt$$

$$\dot\gamma(t) = \dot\gamma'(f(t))\,\dot f(t)$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f"'] & U \\ I' \arrow[ur, "\gamma'"'] & \end{tikzcd}$$

$$\underset{\tau := f(t)}{=} \int_{I'} F(\gamma'(\tau))\cdot\dot\gamma'(\tau)\,d\tau = \int_{\gamma'} F(r)\cdot dr \qquad \square$$

- D.h. das Linienintegral ändert sich nicht, wenn der Weg mit anderer Geschw. durchlaufen wird.
- Die Kurven γ und γ' heißen „<u>äquivalent</u>"

__Def.:__ Ein Vektorfeld $F \in C(U \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ heißt „<u>konservativ</u>", wenn

$$\boxed{\oint_\gamma F(r)\cdot dr = 0}$$

für alle stückweise diff.baren Kurven in U gilt.

Gradientenfelder sind konservativ:

Satz: Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $\gamma \in C^1([t_0,t_1], U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:

$$\boxed{\int_\gamma (\nabla f)(r) \cdot dr = f(r_1) - f(r_0)} \quad \text{mit } r_i := \gamma(t_i)$$

Insbesondere $\oint_\gamma (\nabla f)(r) \cdot dr = 0$ für geschlossene Kurven.

Beweis: Nach der Kettenregel gilt $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)$ und damit

$$\int_\gamma (\nabla f)(r) \cdot dr := \int_{t_0}^{t_1} (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\, dt$$

$$\overset{\text{H.D.I.}}{=} f(r_1) - f(r_0)$$

$\square$

Gilt natürlich ebenso für $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ mit $\gamma_i \in C^1$.

Satz: Für $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sind äquivalent:

1) $\int_\gamma F(r) \cdot dr = \int_{\gamma'} F(r) \cdot dr$ für alle stückweise stetig diff.baren Kurven $\gamma, \gamma' \in C([t_0,t_1], U)$, $t_0 \neq t_1$.

D.h. das Integral ist „wegunabhängig". In dem Fall def. man:

$$\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_1)} F(r) \cdot dr := \int_\gamma F(r) \cdot dr$$

2) F ist konservativ

3) $\exists f \in C^1(U, \mathbb{R})$: $F = \nabla f$ (Existenz eines „Potentials" f)

Beweis: 1) ⇒ 3): Wähle $x_0 \in U$ und definiere $\boxed{f(x) := \int_{x_0}^{x} F(r) \cdot dr}$

„Stammfkt." für F

Dann ist $f(x+\Delta) - f(x) - F(x) \cdot \Delta = \int_x^{x+\Delta} F(r) \cdot dr - F(x) \cdot \Delta$

$= \ldots$

$$\ldots = \int_x^{x+\Delta} \left(F(r) - F(x)\right)\cdot dr \quad \text{da } F(x) =: \tilde{F} \text{ konstant bzgl. } r$$

$$\text{und } \int_x^{x+\Delta} \tilde{F}\cdot dr = \int_0^1 \tilde{F}\cdot\dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \tilde{F}\cdot\Delta\, dt \quad \text{mit } \gamma(t) = x + t\Delta$$

$$= \int_0^1 \left(F(x+t\Delta) - F(x)\right)\cdot\Delta\, dt$$

Es gilt also
$$\frac{\| f(x+\Delta) - f(x) - F(x)\cdot\Delta \|}{\|\Delta\|} \leq \sup_{\|y-x\| \leq \|\Delta\|} \| F(y) - F(x) \|$$
$$\to 0 \text{ für } \Delta \to 0 \quad \checkmark$$

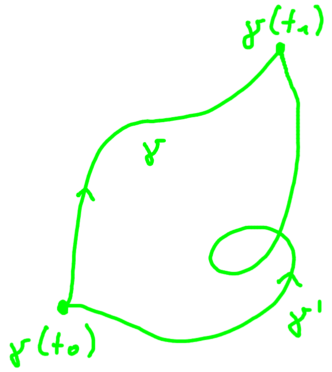
__3) ⇒ 2):__ z.z.: $\oint_\gamma F(r)\cdot dr = 0$

$$\oint_\gamma (\nabla f)(r)\cdot dr = f(r_1) - f(r_0) \overset{r_1 = r_0}{=} 0 \quad \checkmark$$

__2) ⇒ 1):__ Seien $\gamma, \gamma' \in C([t_0, t_1], U)$, $t_1 > t_0$

Definiere $\gamma'_- \in C([t_1, 2t_1 - t_0], U)$

$$t \mapsto \gamma'(2t_1 - t)$$



Dann ist $\Gamma := \gamma + \gamma'_-$ eine geschlossene Kurve

und daher
$$0 = \oint_\Gamma F(r)\cdot dr = \int_\gamma F(r)\cdot dr + \int_{\gamma'_-} F(r)\cdot dr$$
$$= \int_\gamma F(r)\cdot dr - \int_{\gamma'} F(r)\cdot dr$$

□

__Bem.:__ Nächste Stunde werden wir sehen, dass wenn U z.B. konvex ist, die Gradientenfelder genau die „rotationsfreien" sind, was eine einfach zu überprüfende Bedingung an F darstellt.