Bemerkung: C^1-Diffeomorphismus $\Rightarrow$ Homöomorphismus

Korollar: Sei $f \in C^1(U, Y)$, $U \subseteq X$ offen und so, dass $\forall x \in U \; \exists \, f'(x)^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. Dann gilt:

(1) $f(U)$ ist offen,

(2) f injektiv $\Rightarrow$ $f: U \to f(U)$ ist C^1-Diffeomorphismus

Beweis: Umkehrsatz $\Rightarrow$ Für alle $x \in U$ gibt es eine offene Umgebung $V_x \subseteq U$, so dass $f|_{V_x}: V_x \to f(V_x)$ C^1-Diffeomorphismus ist.

(1): Also ist $f(V_x)$ offen, und damit auch $f(U) = \bigcup_{x \in U} f(V_x)$

(2): $f: U \to f(U)$ ist C^1, bijektiv & f^{-1} ist C^1, da

$$f^{-1}|_{f(V_x)} \in C^1 \quad \forall x \in U.$$

$\square$

Implizite Funktionen

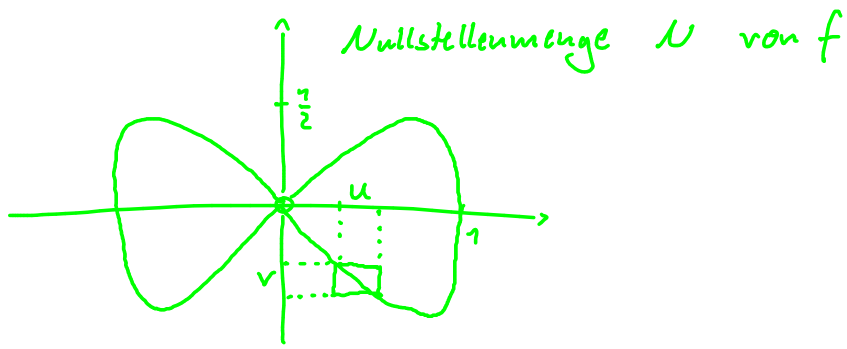
Ziel: Auflösen von (nicht-linearen) Gleichungssys.

Gegeben $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f(x,y) = 0$

Gesucht $\hat{y}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ so dass $\forall (x,y) \in U \times V$:

$$f(x,y) = 0 \iff y = \hat{y}(x)$$

Bsp. 1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2$



Für fast jeden Punkt $(x_0, y_0) \in N$ gibt es $U \times V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, so dass sowohl $\hat{y}$ als auch $\hat{x}$ existieren. Ausnahmen:

<u>$(0,0)$</u>: weder $\hat{x}$ noch $\hat{y}$ existieren

beachte: $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 0$

<u>$(\pm 1, 0)$</u>: $\hat{y}$ existiert nicht, aber $\hat{x}$ existiert

beachte: $\frac{\partial}{\partial y} f(\pm 1, 0) = 0$ aber $\frac{\partial}{\partial x} f(\pm 1, 0) \neq 0$

<u>Bsp. 2:</u> $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$(x, y) \mapsto Ax + By$ lineares Gl.sys. mit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$Ax + By = 0 \iff y = \underbrace{-B^{-1}Ax}_{=: \hat{y}(x)}$$ falls B^{-1} existiert

($\iff \det(B) \neq 0$)

beachte: $B = \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_l} \right)_{k,l = 1..m}$

<u>Def.</u>: („<u>partielle Differentiale</u>") Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subseteq X \times Y$ offen und $f \in C^1(U, Z)$.

$$d_x f(x,y): X \to Z, \quad h \mapsto f'(x,y)(h,0)$$

$$d_y f(x,y): Y \to Z, \quad k \mapsto f'(x,y)(0,k)$$

<u>Bemerkungen:</u>

- damit ist das „totale Differential"

$$f'(x,y)(h,k) =: \underbrace{df(x,y)}_{J}(h,k) = \underbrace{d_x f(x,y)}_{J_x} h + \underbrace{d_y f(x,y)}_{J_y} k$$

- Für die Jacobi-Matrizen gilt dementsprechend

$$J = (J_x \mid J_y)$$

Satz über implizite Funktionen: Sei $f \in C^k(U,Z)$, $1 \leq k \leq \infty$, X, Y, Z Banachräume, $U \subseteq X \times Y$ offen und $(x_0, y_0) \in U$ eine Nullstelle von f. Wenn $d_y f(x_0,y_0) : Y \to Z$ ein Isomorphismus ist, dann gibt es Umgebungen $U' \subseteq X$ von x_0 und $U'' \subseteq Y$ von y_0, sowie eine Abbildung $\hat{y} \in C^k(U', U'')$, so dass

$$f(x,y) = 0, \ (x,y) \in U' \times U'' \iff y = \hat{y}(x), \ x \in U'.$$

Beweis: Definiere $F(x,y) := (x, f(x,y))$, $F : U \to X \times Z$.

$$F'(x_0,y_0)(h,k) = (h, d_x f(x_0,y_0) h + d_y f(x_0,y_0) k)$$

$$\text{d.h.} \quad F'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ d_x f(x_0,y_0) & d_y f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Da $d_y f(x_0,y_0)$ ein Isomorphismus ist, ist auch $F'(x_0,y_0)$ ein Isomorphismus. Nach dem Umkehrsatz ist F dann ein lokaler C^k-Diffeomorphismus. D.h. es gibt Umgebungen U_0 von (x_0,y_0) und V von $F(x_0,y_0) = (x_0, 0)$, so dass $F^{-1} : V \to U_0$ mit $F^{-1}(a,b) = (a, \tilde{y}(a,b))$ für geeignetes $\tilde{y}$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Für $(x,y) \in U_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 &\iff F(x,y) = (x,0) \\ &\iff (x,y) = F^{-1}(x,0) = (x, \tilde{y}(x,0)) \\ &\iff y = \tilde{y}(x,0) \end{aligned}$$

Wegen Stetigkeit von $\tilde{y}$ finden sich passende Umgebungen $U' \times U'' \subseteq U_0$, so dass $\hat{y} : U' \to U''$, $\hat{y}(x) := \tilde{y}(x,0)$ das Gewünschte leistet.

$\square$

Bemerkung:

- Soll $d_y f(x_0,y_0)$ ein Isomorphismus sein, dann muss $(Y = \mathbb{R}^n \Rightarrow Z = \mathbb{R}^n)$ & in dem Fall:

$$d_y f(x_0,y_0) \text{ Isomorphismus} \iff \underbrace{\det(d_y f(x_0,y_0))}_{= \det(F'(x_0,y_0))} \neq 0$$

- Wenn $d_y f(x_0,y_0)$ kein Isomorphismus ist, kann es mehrere „Lösungszweige" $\hat{y}_i(x)$ geben

(Stichwort: „Bifurkation")

Bsp.:

$$f_1(x,y_1,y_2) = x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 = 0$$

$$f_2(x,y_1,y_2) = xy_1 + y_1 y_2 + y_2 x + 2 = 0$$

Ist dies um die Nullstelle $(2,-1,0)$ nach (y_1,y_2) auflösbar?

$$d_y f(2,-1,0) = \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x+y_2 & x+y_1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,-1,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(\dots) = 3 \Rightarrow$ Ja ✓

Zusammengefasst:

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Für } C^1\text{-Abbildung bzw. } C^1 \text{ Gleichungssys. gilt:} \\ \circ \text{ Umkehrbarkeit der linearen Approximation} \\ \qquad \Rightarrow \text{lokale Umkehrbarkeit} \\ \circ \text{ Auflösbarkeit der linearen Approximation} \\ \qquad \Rightarrow \text{lokale Auflösbarkeit} \end{array}}$

d.h. das Problem wird auf eines der lin. Algebra zurückgeführt.

Korollar: Ist $f \in C^1(U,Z)$, $U \subseteq X \times Y$, so dass $f(x,y)=0$ für $(x,y) \in U' \times U''$ nach y durch $\hat{y}: U' \to U''$ auflösbar ist, dann gilt

$$\hat{y}'(x) = -\left[d_y f(x,\hat{y}(x))\right]^{-1} d_x f(x,\hat{y}(x))$$

Beweis: Durch Ableiten von $f(x,\hat{y}(x))=0$ mit Hilfe der Kettenregel erhält man wegen $f \circ h(x) = f(x,\hat{y}(x))$ wobei

$$x \overset{h}{\longmapsto} (x,\hat{y}(x)) \overset{f}{\longmapsto} f(x,\hat{y}(x))$$

$$\begin{aligned} 0 = (f \circ h)'(x) &= f'(h(x))\, h'(x) \\ &= \begin{pmatrix} d_x f(h(x)) & d_y f(h(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \hat{y}'(x) \end{pmatrix} \\ &= d_x f(x,\hat{y}(x)) + d_y f(x,\hat{y}(x))\, \hat{y}'(x) \end{aligned}$$

$\square$