... Kurvenintegrale nochmal in etwas anderer Sprache:

Differentialformen I – Pfaffsche Formen

Erinnerung: ∘ Für die Ableitung $f' =: df$ einer diff.baren Funktion $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt $df: U \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

∘ Es gibt eine ein-eindeutige Beziehung zw. Abbildungen $\omega: U \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und Vektorfeldern $F: U \to \mathbb{R}^n$ über

$$\omega(x)h \equiv \langle F(x), h \rangle$$

analog zu $df(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$

Def.: ∘ Eine Abbildung $\omega: U \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt reellwertige „Pfaffsche Form" (synonym: „Differentialform ersten Grades", „1-Form")

∘ Gibt es eine diff.bare Funktion $f: U \to \mathbb{R}$, so dass $df = \omega$, dann heißt f „Stammfunktion" (synonym: „Potential") von ω auf U und ω eine „exakte" 1-Form.

Bem.: 1-Formen sind die natürlichen Integranden für Wegintegrale, k-Formen (später...) die für Integration auf k-dim. Flächen.

Sei $x_i: (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \xi_i$ für $i = 1, \dots, n$, so dass $dx_i(\xi)h = h_i$.
Ist ω 1-Form mit $\omega(\xi)e_i =: a_i(\xi)$ = „Koeffizient" $a_i: U \to \mathbb{R}$ bzgl. $dx_1, \dots, dx_n$
dann gilt $\omega(\xi)h = \sum_{i=1}^{n} a_i(\xi)\, dx_i(\xi)\, h$

oder kurz $\boxed{\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n}$

Def.: Ist $\omega: U \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine stetige 1-Form und $\gamma: [t_0, t_1] \to U$ stückweise C^1, dann definieren wir

$$\boxed{\int_\gamma \omega := \int_{t_0}^{t_1} \omega(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt}.$$

Wir wissen: $\int_\gamma \omega$ ist wegunabh. bzw $\oint_\gamma \omega = 0$ genau dann wenn ω eine exakte 1-Form ist! D.h., wenn das zugehörige Vektorfeld ein Gradientenfeld ist.

Bsp.: $\omega := y^2 dx + dy$, $\gamma(t) := (t, t^\alpha)$, $t \in [0,1]$, $\alpha \geq 1$

$\dot\gamma(t) = (1, \alpha t^{\alpha-1})$

$\omega(x,y)h = y^2 h_1 + h_2$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \overbrace{\left(t^{2\alpha} + \alpha t^{\alpha-1}\right)}^{\omega(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)} dt = \left[\frac{1}{2\alpha+1} t^{2\alpha+1} + t^\alpha\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2\alpha+1} + 1}$$

hängt vom Weg ab!

Bsp.: „Hamilton'sche Gleichungen"

$H: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{\simeq \mathbb{R}^{2n} \text{ „Phasenraum"}} \to \mathbb{R}$ „Hamiltonfunktion" $H(p, q)$

Impulse (p), Orte (q)

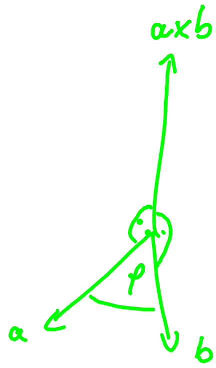
Energieänderung beim Durchlauf einer Trajektorie $\gamma(t) = (p(t), q(t))$:

$$\int_\gamma dH = \int_\gamma \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H(p(t), q(t))}{\partial q_i} \dot q_i(t) + \frac{\partial H(p(t), q(t))}{\partial p_i} \dot p_i(t) \right) dt$$

Energieerhaltung fordert $dH = 0$ längs γ, was durch die „Hamilton'schen Bwg.gl." $\boxed{\dot p_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} H}$ und $\boxed{\dot q_i = \frac{\partial}{\partial p_i} H}$ gewährleistet wird.

Vektoranalysis – Nabla Kalkül

Erinnerung: Kreuzprodukt



- $a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
- $\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \varphi$
- $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$
- $a \times b = - b \times a$
- $a \times (b \times c) = b\,(a \cdot c) - c\,(a \cdot b)$
- „Levi-Civita-Tensor"

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{–"– un –"– \quad –"– \quad –"–} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

damit ist $(a \times b)_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$

Wir betrachten vier verwandte „Differentialoperatoren",

$$\begin{tikzcd} \text{Vektorfeld} \arrow[rr, "\mathrm{rot}"] \arrow[drr, "\mathrm{div}"] & & \text{Vektorfeld} \\ \text{Skalarfeld} \arrow[urr, "\mathrm{grad}"] \arrow[rr, "\Delta"'] & & \text{Skalarfeld} \end{tikzcd}$$

die sich alle mit Hilfe des „Nabla Operators" $\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$" ausdrücken lassen. Dieser ist erstmal eine Kurzschreibweise und für sich noch kein math. Objekt.

<u>Def.:</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$

- $\operatorname{grad}: C^k(U,\mathbb{R}) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R}^n)$ „Gradient"

$$f \mapsto \operatorname{grad} f = \nabla f$$

Beachte Vorzeichenkonvention in der Physik: wenn ∇f ein Kraftfeld ist, so ist $-f$ das zug. Potential.

- $\operatorname{div}: C^k(U,\mathbb{R}^n) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R})$ „Divergenz"

$$F \mapsto \operatorname{div} F := \sum_{j=1}^{n} \partial_j F_j = \nabla \cdot F$$

$\operatorname{div} F$ kann als „Quellstärke" interpretiert werden.

$\operatorname{div} F = 0 \Rightarrow F$ heißt „quellenfrei" bzw. „divergenzfrei"

- $\Delta: C^{k+1}(U,\mathbb{R}) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R})$ „Laplace Operator"

$$f \mapsto \Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f = \nabla^2 f$$

$\Delta f = 0 \Rightarrow f$ heißt „harmonisch"

<u>Bem.:</u> In „Wellengleichungen" wird Δ oft auf Vektorfelder angewandt und ist dann komponentenweise zu lesen, d.h. $(\Delta F)_i := (\Delta F_i)$

- und für $n=3$:

$\operatorname{rot}: C^k(U,\mathbb{R}^3) \to C^{k-1}(U,\mathbb{R}^3)$ „Rotation"

$$F \mapsto \operatorname{rot} F := \nabla \times F$$

also $$(\operatorname{rot} F)_i := \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k$$

$\nabla \times F = 0 \Rightarrow F$ heißt „rotationsfrei"

Satz: Für $f \in C^2(U,\mathbb{R})$, $\tilde{F} \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen gilt:

(1) $F = \nabla f \Rightarrow \nabla \times F = 0$

(2) $V = \nabla \times \tilde{F} \Rightarrow \nabla \cdot V = 0$, $\tilde{F}$ heißt „Vektorpotential" von V

d.h. Gradientenfelder sind rotationsfrei &
Rotationsfelder divergenzfrei

Beweis: (1) $\nabla \times F = \nabla \times (\nabla f) = \left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f \right)_i \overset{\uparrow}{=} 0$

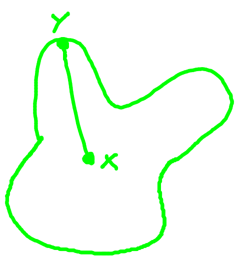
$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$

(2) $\nabla \cdot V = \nabla \cdot (\nabla \times \tilde{F}) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j \tilde{F}_k = 0$ $\square$

Bem:
- D.h. $\nabla \times F = 0$ ist notwendig dafür dass F konservativ ist.
- Potentiale / Vektorpotentiale sind durch F bzw. V nur bis auf additive Konstanten / Gradientenfelder bestimmt, da z.B. $\nabla \times \tilde{F} = \nabla \times (\tilde{F} + \nabla f)$. Man spricht von „Eichfreiheit"
- Die Umkehrung der Implikationen (1) & (2) gilt, wenn U eine zusätzliche Eigenschaft erfüllt:

Def.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „sternförmig", falls es ein $x \in U$ gibt, so dass

$\forall y \in U \ \forall t \in [0,1]: \ tx + (1-t)y \in U$



D.h. konvex $\Rightarrow$ sternförmig

Außerdem gilt:

sternförmig $\Rightarrow$ „einfach zusammenh."

Satz: Wenn $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $\boxed{\partial_i F_k = \partial_k F_i}$ $\forall i,k = 1 \dots n$ gilt auf einem sternförmigen Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist F ein Gradientenfeld

Beweis: O.b.d.A. U sternförmig bzgl. des Ursprungs.

$$f(x) := \int_0^1 \langle F(tx), x \rangle \, dt$$

$F_i \in C^1 \Rightarrow$ part. Abl. vertauscht mit Integral, d.h.

$$\partial_k f(x) = \int_0^1 \partial_k \left(\sum_{i=1}^n F_i(tx)\, x_i \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(F_k(tx) + \sum_{i=1}^n t x_i \underbrace{\partial_k F_i(tx)}_{=} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(F_k(tx) + \sum_{i=1}^n t x_i \overbrace{\partial_i F_k}(tx) \right) dt$$

$\tau(t) = tx$

$[0,1] \xrightarrow{\tau} U \xrightarrow{F_k} \mathbb{R}$

$\frac{d}{dt} F_k(tx) = \frac{d}{dt} F_k \circ \tau(t)$

$= \nabla F_k(tx) \cdot x$

$$= \int_0^1 \left(F_k(tx) + t \frac{d}{dt} F_k(tx) \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t F_k(tx) \right) dt = F_k(x) \qquad \square$$

Satz: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sternförmig und $V \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, so dass $\nabla \cdot V = 0$, dann gilt $V = \nabla \times F$ mit $F(r) := \int_0^1 t V(tr)\, dt \times r$

Beweis: Definiere $G(r) := \int_0^1 t V(tr)\, dt$, so dass $F(r) = G(r) \times r$.

$r = (x_1, x_2, x_3)$

$$\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \overset{\downarrow}{=} \partial_2 (G_1 x_2 - G_2 x_1) - \partial_3 (G_3 x_1 - G_1 x_3)$$

$$= 2 G_1 - x_1 \underbrace{(\partial_2 G_2 + \partial_3 G_3)}_{= -\partial_1 G_1 \text{ da } \nabla \cdot G = 0} + x_2 \partial_2 G_1 + x_3 \partial_3 G_1$$

$$= 2 G_1 + \sum_{j=1}^3 x_j \partial_j G_1$$

$$2G_1 = 2\int_0^1 t\, V_1(tx)\, dt$$ part. Integration ...

$$= \left[t^2 V_1(tx)\right]_0^1 - \int_0^1 t^2 \frac{d}{dt} V_1(tx)\, dt$$

$$= V_1(x) - \int_0^1 t^2 \sum_{j=1}^3 x_j \left(\partial_j V_1\right)(tx)\, dt$$ mit $(\partial_j V_1)(tx) = \frac{1}{t}\partial_j\left(V_1(tx)\right)$

$$= V_1(x) - \sum_{j=1}^3 x_j \partial_j G_1$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot} F = V$$

$\square$