Bsp.: (3) $f: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $A \mapsto A^2$

$f'(A): B \mapsto AB + BA$, d.h. für $n=1$: $f'(x): b \mapsto \underline{\underline{2xb}}$

Beweis: $f(A+\Delta) - f(A) - f'(A)\Delta$

$$= (A+\Delta)^2 - A^2 - A\Delta - \Delta A = \Delta^2$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta\to 0} \frac{\|\ldots\|}{\|\Delta\|} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\|\Delta^2\|}{\|\Delta\|} \underset{\uparrow}{\leq} \lim_{\Delta\to 0} \|\Delta\| = 0$$

$\|\Delta^2\| \leq \|\Delta\|^2$ für Operatornorm $\square$

(4) $f: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $A \mapsto e^A$

$$f'(A): B \mapsto \int_0^1 e^{(1-t)A} B e^{tA}\, dt,$$

d.h. für $[A,B]=0$ ist $f'(A): B \mapsto e^A B$.

Lemma: (Dyson) Für $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ und die Operatornorm $\|\cdot\|$

gilt $e^{A+B} - e^A = \int_0^1 e^{(1-t)A} B e^{t(A+B)}\, dt$ und

$\|e^{A+B} - e^A\| \leq e^{\|A\|}\left(e^{\|B\|} - 1\right)$.

Beweis: (Lemma) definiere $g: t \in \mathbb{R} \mapsto e^{A(1-t)} e^{(A+B)t} \in M_n(\mathbb{C})$

dann ist $g'(t) = e^{A(1-t)} B e^{(A+B)t}$ und

$$e^{A+B} - e^A = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\, dt = \int_0^1 e^{A(1-t)} B e^{(A+B)t}\, dt.$$

$$\|e^{A+B} - e^A\| \leq \|B\| \int_0^1 \|e^{A(1-t)}\| \, \|e^{(A+B)t}\|\, dt$$

$$\leq \|B\| \int_0^1 e^{\|A\|(1-t)} e^{(\|A\|+\|B\|)t}\, dt$$

$$= \|B\| e^{\|A\|} \int_0^1 e^{\|B\|t}\, dt = e^{\|A\|}\left(e^{\|B\|} - 1\right) \quad \square$$

Verifikation von f': $\| e^{A+\Delta} - e^{A} - f'(A)\Delta \| = \| \int_0^1 e^{(1-t)A} \Delta \left(e^{t(A+\Delta)} - e^{tA} \right) dt \|$

$$\overset{a := \|A\|}{\leq} \|\Delta\| \int_0^1 e^{(1-t)a} e^{ta} \left(e^{\|\Delta\| t} - 1 \right) dt$$

$$\overset{e^{\|\Delta\| t} \leq e^{\|\Delta\|}}{\leq} \|\Delta\| e^{a} \left(e^{\|\Delta\|} - 1 \right) = o(\|\Delta\|) \text{ für } \Delta \to 0$$

$\square$

Satz: (Kettenregel) Seien X, Y, Z Banachräume, $f: U \subseteq X \to Y$, $g: V \subseteq Y \to Z$ mit U, V offen. Ist f diff.bar bei $x \in U$ und g diff.bar bei $f(x) \in V$, dann gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

Beweis: $f(x+\Delta) = f(x) + f'(x)\Delta + r(\Delta)$ mit $\lim_{\Delta \to 0} \frac{\|r(\Delta)\|}{\|\Delta\|} = 0$

$y := f(x)$, $g(y+\Delta') = g(y) + g'(y)\Delta' + s(\Delta')$ mit $s(\Delta') = o(\|\Delta'\|)$

mit $\Delta' := f'(x)\Delta + r(\Delta)$ und $t(\Delta) := g'(y) r(\Delta) + s(\Delta')$ gilt

$$(g \circ f)(x+\Delta) = g(y) + g'(y) f'(x)\Delta + t(\Delta)$$

z.z.: $t(\Delta) = o(\|\Delta\|)$

$$\frac{\|t(\Delta)\|}{\|\Delta\|} \leq \|g'(y)\| \frac{\|r(\Delta)\|}{\|\Delta\|} + \frac{\|s(\Delta')\| \cdot \|\Delta'\|}{\|\Delta'\| \cdot \|\Delta\|}$$

$$\leq \underbrace{\|g'(y)\|}_{<\infty} \underbrace{\frac{\|r(\Delta)\|}{\|\Delta\|}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\|s(\Delta')\|}{\|\Delta'\|}}_{\to 0} \left(\underbrace{\|f'(x)\|}_{<\infty} + \underbrace{\frac{\|r(\Delta)\|}{\|\Delta\|}}_{\to 0} \right)$$

$\to 0$ mit $\Delta \to 0$

$\square$

Def.: • Für $\mathbb{K}$-Banachräume X, Y, Z heißt eine Abb. $\beta: X \times Y \to Z$ „bilinear" wenn sie $\mathbb{K}$-linear in beiden Argumenten ist.

• β heißt „beschränkt" wenn $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall (x,y) \in X \times Y$:
$$\|\beta(x,y)\| \leq c\,\|x\| \cdot \|y\|$$

Beispiele: sind das „Kreuzprodukt" $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

& das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Lemma: Jede beschränkte, bilineare Abb. $\beta: X \times Y \to Z$ ist diff.bar in $X \times Y$ und es gilt mit $\|(x,y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$
$$\beta'(x,y) : (s,t) \mapsto \beta(x,t) + \beta(s,y)$$

Beweis: $\beta(x+s, y+t) - \beta(x,y) - \big(\beta(x,t) + \beta(s,y)\big) = \beta(s,t)$

und damit $\dfrac{\|\beta(s,t)\|}{\|(s,t)\|} \leq c \dfrac{\|s\| \cdot \|t\|}{\max\{\|s\|, \|t\|\}} \to 0$ ✓ $\square$

Satz: (Produktregel) Sind $f, g: U \subseteq X \to Y$ in der offenen Menge U diff.bar und ist $\beta: Y \times Y \to Z$ bilinear u. beschränkt, dann ist auch $h: U \subseteq X \to Z$, $x \mapsto \beta(f(x), g(x))$ in U diff.bar und es gilt für $x_0 \in U$:
$$h'(x_0): x \mapsto \beta\big(f'(x_0)x, g(x_0)\big) + \beta\big(f(x_0), g'(x_0)x\big)$$

Beweis: Anwendung der Kettenregel auf $h = \beta \circ \alpha$ mit $\alpha: U \to Y \times Y$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ liefert:
$$h'(x_0) = (\beta \circ \alpha)'(x_0) = \beta'(\alpha(x_0))\,\alpha'(x_0)$$
$$= \beta'\big(f(x_0), g(x_0)\big)\big(f'(x_0), g'(x_0)\big)$$
$\square$

Bsp.: Für das Vektorprodukt diff.barer Abb. $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gilt
$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$