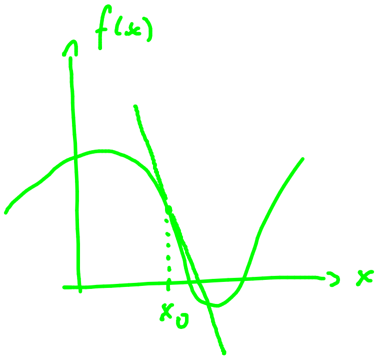
III. Differentialrechnung

Erinnerung: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff.bar bei: $x_0 \in I$ wenn



$$f(x_0+\Delta) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta + o(\Delta) \quad \text{für } \Delta \to 0$$

Ableitung = lineare Näherung

$g(\Delta) = o(\Delta),\ \Delta \to 0$ heißt $\lim_{\Delta \to 0} \frac{g(\Delta)}{|\Delta|} = 0$

Def.: Seien X, Y Banachräume $U \subseteq X$ offen und $f: U \to Y$.

- Eine beschränkte lineare Abbildung $f'(x_0): X \to Y$ heißt „Ableitung" von f bei $x_0 \in U$, wenn gilt

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\| f(x_0+\Delta) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta \|}{\|\Delta\|} = 0 \qquad (*)$$

- $f'(x_0) \equiv Df(x_0)$ heißt auch „(totales) Differential", „Fréchet Ableitung" und im Fall $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ „Jacobimatrix" am Punkt x_0.
- Existiert die Ableitung $f'(x_0)$, heißt f im Punkt x_0 „differenzierbar".
- Sei $B(X,Y)$ die Menge der beschränkten, linearen Abbildungen von X nach Y. Existiert $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in U$, dann definiert $f': U \to B(X,Y)$, $x_0 \mapsto f'(x_0)$ die „Ableitung" von f.

Bemerkungen:

- $\lim_{\Delta \to 0} g(\Delta)$ ist als „stetige Fortsetzung" von g in 0 zu verstehen, d.h. als Grenzwert <u>sämtlicher</u> Folgen $y_n \to 0$ von $g(y_n)$.
- $(*)$ ist äquivalent zu $f(x_0+\Delta) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta + o(\|\Delta\|)$
- Für lineare Abb. $F: X \to Y$ schreiben wir $Fx = F(x)$.
- Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $f'(x_0)$ eine „lineare Abb." im Sinn $x \mapsto f'(x_0)x$.

Def.:

- Eine lineare Abbildung $F: X \to Y$ zw. zwei Banachr. $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ heißt „<u>beschränkt</u>" g.d.w.

$$\exists c \in \mathbb{R} \; \forall x \in X: \; \|Fx\|_Y \leq c\|x\|_X \qquad (*)$$

- Ist F beschränkt, so ist die „<u>Operatornorm</u>" definiert als

$$\|F\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X}$$

Bemerkungen:

- Eine lineare Abb. $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ ist stets beschränkt.
- Die Operatornorm ist die kleinstmögliche Schranke c in $(*)$, da gilt

$$\forall x \in X: \; \|Fx\|_Y \leq \|F\| \, \|x\|_X$$

Satz: Eine lineare Abb. ist beschränkt g.d.w. sie stetig ist.

Beweis: Sei $F: X \to Y$ linear.

- $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x: \|Fx\| \leq c\|x\| \Rightarrow F$ (Lipschitz) stetig ✓
- umgekehrt: ist F stetig bei 0, dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass $\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Fx\| \leq 1$

  Also gilt $\forall x \in X \setminus \{0\}$: $\|Fx\| = \frac{\|x\|}{\delta} \left\| F\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)\right\|$

  $$\leq \frac{1}{\delta}\|x\|. \qquad \square$$

Korollar: Die Ableitung ist (wenn sie existiert) eindeutig.

Beweis: $$0 \overset{!}{=} \lim_{\Delta \to 0} \frac{\|(\tilde{f}'(x_0) - f'(x_0))\Delta\|}{\|\Delta\|} = \lim_{\Delta \to 0} \left\| \left(\tilde{f}'(x_0) - f'(x_0)\right) \frac{\Delta}{\|\Delta\|} \right\|$$

$$\Rightarrow \tilde{f}'(x_0) = f'(x_0) \qquad \square$$

Satz: Ist $f: U \subseteq X \to Y$ differenzierbar in x_0, so ist f dort auch stetig.

Beweis: Sei (x_n) Folge in U mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

Dann gilt $$f(x_n) = f(x) + f'(x)(x_n - x) + o(\|x_n - x\|)$$

also $$\|f(x_n) - f(x)\| \leq \|f'(x)(x_n - x)\| + o(\|x_n - x\|)$$

$$\leq \|f'(x)\|\,\|x_n - x\| + o(\|x_n - x\|) \to 0 \text{ für } n \to \infty \qquad \square$$

Bsp.:

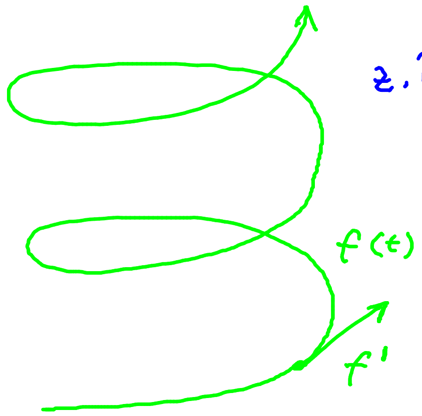
① $f: x \mapsto Ax + v$ mit $A: X \to Y$ linear, $v \in Y$

$$f'(x_0) = A \quad \forall x_0$$

da $$f(x_0+\Delta) = Ax_0 + A\Delta + v$$
$$= f(x_0) + A\Delta$$

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$$



z.B. $f: t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$ „Schraubenlinie"

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}$$ Tangentialvektor

__allgemein__: ist $f: X \to Y_1 \times \dots \times Y_n$

dann gilt $f'(x_0) = (f_1'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$

__Korollar__: Sind $f, g: U \subseteq X \to Y$ mit U offen diff.bar bei $x_0 \in U$ und $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,

(ii) $(cf)'(x_0) = c\,f'(x_0)$.

Beweis von (i) $\|(f+g)(x_0+\Delta) - (f+g)(x_0) - (f'(x_0)+g'(x_0))\Delta\| \, \|\Delta\|^{-1}$

$$\leq \|f(x_0+\Delta) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta\| \cdot \|\Delta\|^{-1}$$
$$+ \|g(x_0+\Delta) - g(x_0) - g'(x_0)\Delta\| \cdot \|\Delta\|^{-1} \to 0 \quad ✓ \quad \square$$