Quotienten

Erinnerung: • Eine Relation $\sim$ auf X heißt „Äquivalenzrelation" wenn sie reflexiv, transitiv & symmetrisch ist.

• Für jedes $x \in X$ heißt $[x] := \{ y \in X \mid x \sim y \}$ „Äquivalenzklasse" von x

• $X/\sim \; := \{ [x] \mid x \in X \}$ heißt „Quotientenmenge"

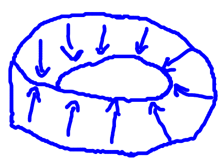
• $\pi : X \to X/\sim, \; x \mapsto [x]$ heißt „Quotientenabbildung"

Def.: Ist $\sim$ Äquivalenzrelation auf einem top. Raum X, so heißt $U \subseteq X/\sim$ „offen in der Quotiententopologie" wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Bemerkung: D.h. insbesondere, dass π stetig ist.

Bsp.: • Ist $X = [0,1]$ mit $0 \sim 1$, dann ist $X/\sim$ homöomorph zu S^1.

• Ist $X = [0,1] \times [0,1]$, dann wird mit $(0,y) \sim (1,y)$ daraus ein „Zylinder" und mit $(0,y) \sim (1,1-y)$ ein Möbiusband.



Endlichdimensionale Banachräume

Lemma: Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer nicht-leeren Menge X erzeugen dieselbe Topologie, g.d.w.

$$\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1, \delta_2 > 0 \ \forall x \in X: \quad \begin{cases} d_1(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow d_2(x, x_0) < \varepsilon, \\ d_2(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow d_1(x, x_0) < \varepsilon. \end{cases}$$

Beweis: Die Bedingung bedeutet, dass die identische Abbildung $x \mapsto x$ in beide Richtungen stetig ist. Dies ist hinreichend & notwendig für $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

Korollar: Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem Vektorraum X erzeugen dieselbe Topologie, wenn es $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ gibt, s.d.

$$\forall x \in X: \qquad c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\|.$$

Beweis: z.B.: $\|x - x_0\|' \leq c_2 \|x - x_0\| \leq \varepsilon$ wenn $\|x - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{c_2} =: \delta$ $\square$

Satz: Sei X ein endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum. Alle Normen auf X erzeugen ein und dieselbe Topologie.

Beweis:
- X kann (z.B. durch Wahl einer Basis) mit dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden.
- Da die „Äquivalenz" von Normen transitiv ist, genügt es z.z. dass alle Normen dieselbe

Topologie wie $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ generieren.

∘ $$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \underset{\text{ONB}}{\|e_i\|} \overset{\text{C.S.}}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{1/2}}_{=: c_2} \|x\|_2$$

∘ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \|x\|$

ist stetig bzgl. $\|\cdot\|_2$, da

$$|f(x) - f(y)| = \big| \|x\| - \|y\| \big|$$
$$\leq \|x-y\| \leq c_2 \|x-y\|_2 .$$

$f|_{S^{n-1}}$ ist stetig auf der kompakten Menge

$$S^{n-1} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1 \}$$

damit existiert $\min\{ f(x) \mid x \in S^{n-1} \} =: \mu \in (0, \infty)$

und es gilt $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq \mu$ für alle $x \neq 0$.

Also: $\forall x \in X: \mu \|x\|_2 \leq \|x\|$ □.

Lemma: Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}^N$ und $\|x\|_\infty := \max\{|x_i|\}_{i=1}^{N}$.

(i) (x_n) ist Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

⇕

(ii) $(x_n)_i$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, N$.

Beweis: (i) bedeutet $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{N} \; \forall n, m > M: \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$

dann folgt (ii) wegen $\forall i: |(x_n)_i - (x_m)_i| \leq \|x_n - x_m\|_\infty$

umgekehrt wählen wir $M = \max\{M_i\}_{i=1}^{N}$ ...

□

Analog zeigt man, dass x_n bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert g.d.w. alle $(x_n)_i$ konvergieren.

Satz: Jeder normierte endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum ist vollständig (und damit ein Banachraum).

Beweis: (x_n) ist Cauchy bzgl. $\|\cdot\|$

$\Rightarrow (x_n)$ — " — bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow (x_n)_i$ — " — für alle i

$\Rightarrow (x_n)_i$ konvergiert für alle i da $\mathbb{R}$ vollst.

$\Rightarrow (x_n)$ — " — bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

$\Rightarrow (x_n)$ — " — $\|\cdot\|$.

$\square$