I. Ausflug ins Abstrakte – Topologische Räume

- $\mathbb{R}^n$ mit üblichem Skalarprodukt (= „Euklidscher Raum")
- Hilbertraum (Vollständigkeit + Skalarprodukt)
- Banachraum (–"– + Norm)

Vektorräume

- Metrischer Raum (Metrik)
- Hausdorff Raum („Trennbarkeit")
- Topologischer Raum (Def. über „offene Mengen")
- Menge

allgemeiner / weniger Struktur

= allgemeinster Rahmen in dem wir über 'Stetigkeit' & 'Konvergenz' sprechen können

Def.: • Ein "<u>topologischer Raum</u>" ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, so dass

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$

(ii) $\{\Omega_i \in \mathcal{O}\}_{i \in I} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathcal{O}$ für bel. I

(iii) $A \in \mathcal{O} \wedge B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{O}$

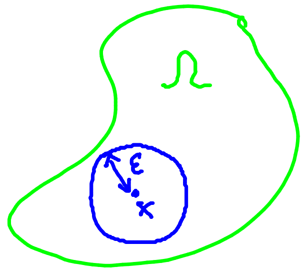
- Elemente von $\mathcal{O}$ heißen "<u>offene Mengen</u>", $\mathcal{O}$ selbst die "Topologie"
- $A \subseteq X$ heißt "<u>abgeschlossen</u>" $\Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{O}$
- $U \subseteq X$ heißt "<u>Umgebung</u>" von $x \in X \Leftrightarrow \exists \Omega \in \mathcal{O} : x \in \Omega \subseteq U$

wichtigstes Bsp.: <u>Topologie metrischer Räume</u>

Für einen metrischen Raum (X,d) mit $U_\varepsilon(a) := \{x \in X \mid d(a,x) < \varepsilon\}$

definiert man $\mathcal{O}$, so dass

$$\Omega \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \; \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$$



Beweis, dass dies tatsächlich eine Topologie definiert:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O} \wedge X \in \mathcal{O}$ ✓

(ii) $x \in \bigcup_i \Omega_i \Rightarrow \exists i : x \in \Omega_i$

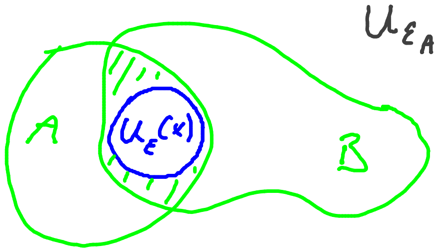
da $\Omega_i \in \mathcal{O}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x) \subseteq \Omega_i$

und damit $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_i \Omega_i$ ✓

(iii) $x \in A \cap B$. Da $A, B \in \mathcal{O}$ gibt es $\varepsilon_A, \varepsilon_B > 0$, so dass

$U_{\varepsilon_A}(x) \subseteq A \wedge U_{\varepsilon_B}(x) \subseteq B$. Also $U_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$

□



Bemerkungen:

- Mengen die nicht offen sind, sind nicht automatisch abgeschlossen. z.B. ist $[0,1)$ weder offen noch -"- im metr. Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
- die Vereinigung <u>bel.</u> vieler offener Mengen ist offen
- der Durchschnitt <u>endl.</u> -"- -"- -"-

  Beispielsweise ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 0$ nicht offen
- $X, \emptyset$ sind offen & abgeschlossen
- wird die Topologie nicht weiter spezifiziert oder die „übliche" genannt, ist die durch die Metrik gegebene gemeint.

weitere Bsp.:

- "Triviale Topologie" $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$
- "Diskrete Topologie" $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{P}$ = Potenzmenge)
- "Zariski Topologie": $X = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$

  $\Omega \in \mathcal{O} :\Leftrightarrow$ $X \setminus \Omega$ ist Lösungsmenge eines Sys. von polynomialen Gl.en.

Def.: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt "<u>Hausdorff Raum</u>" g.d.w. für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ disjunkte offene Mengen Ω_x, Ω_y existieren mit $x \in \Omega_x$ und $y \in \Omega_y$.

Satz: Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff Raum.

Beweis: $x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0$

Behauptung: $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$ für $\varepsilon = \frac{1}{2} d(x,y)$

angenommen $z \in$ –"– , dann wäre

$$2\varepsilon = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2\varepsilon$$

$\square$

Bemerkung: Zariski Topologie & triviale Topologie sind nicht hausdorffsch.

Def.: Ist $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum und $X_0 \subseteq X$, dann heißt

$$\mathcal{O}|_{X_0} := \{\Omega \cap X_0 \mid \Omega \in \mathcal{O}\}$$

„Teilraumtopologie" oder „induzierte Topologie" und $(X_0, \mathcal{O}|_{X_0})$ „topologischer Teilraum".

Beweis, dass dies wieder ein top. Raum ist:

(i) $\emptyset, X_0 = X \cap X_0 \in \mathcal{O}|_{X_0}$ ✓

(ii) $\bigcup_i (\Omega_i \cap X_0) = (\bigcup_i \Omega_i) \cap X_0$ ✓

(iii) $(A \cap X_0) \cap (B \cap X_0) = (A \cap B) \cap X_0$ ✓

$\square$

Mit dieser Def. werden insbes. alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ (Kugeln, Flächen, Kurven, etc.) topol. Räume.

Stetigkeit & topol. Äquivalenz

Def.: Eine Abb. $f: X \to Y$ zw. zwei topologischen Räumen mit Topologien $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ heißt "stetig" g.d.w.

$$\Omega \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{O}_X .$$

Satz: Sind X, Y metrische Räume, dann ist dies äquivalent dazu, dass

$$\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in X: \quad d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Beweis: $\to$ 1. Semester

Bemerkungen:
- Der in metrischen Räumen definierte Begriff der "gleichm. Stet." hat kein Pendant in allg. topolog. Räumen.
- Stetigkeit von $f: X \to Y$ hängt von den Topologien $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ ab. Jedes f ist stetig, wenn X mit der diskreten oder Y mit der trivialen Topologie ausgestattet ist.

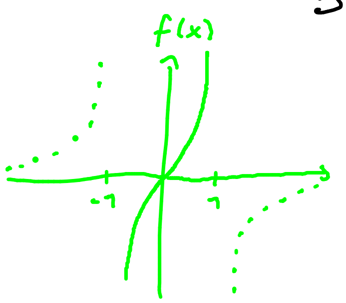
Def.:
- Eine bijektive Abb. $f: X \to Y$ zw. zwei topologischen Räumen heißt „Homöomorphismus" g.d.w. f und f^{-1} stetig sind.
- Zwei top. Räume heißen „homöomorph" (= „topologisch äquivalent") wenn zw. ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Bsp.:
- „Ein Donut & eine Kaffeetasse sind top. äquiv."
- $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x}{1-x^2}$ ist ein Homöomorphismus

Beweis: f ist bijektiv ✓

$$y = f(x) \iff yx^2 + x - y = 0$$

und somit ist $x = f^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{1+4y^2}}{2y} = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}$



f & f^{-1} sind stetig ✓

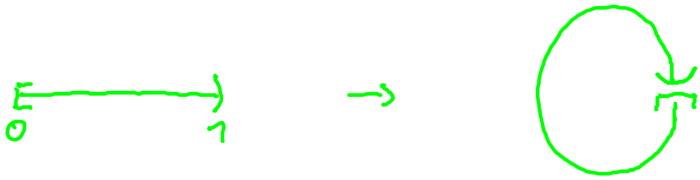
□

$\Rightarrow$ **Satz:** $\mathbb{R}$ ist homöomorph zu jedem offenen Intervall $(a,b) \neq \emptyset$.

Bsp.:

- $[0,1)$ und $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ sind nicht homöomorph.

zwar ist $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ eine stetige Bijektion $f: [0,1) \to S^1$, jedoch ist f^{-1} nicht stetig bei $f(0) = (1,0)$.



Satz: (Stetigkeit & Teilraumtopologie)

Ist $f: X \to Y$ stetig und sind $X_0 \subseteq X$ sowie $Y_0 \subseteq Y$ Teilräume, so dass $f(X_0) \subseteq Y_0$, dann ist $f|_{X_0}: X_0 \to Y_0$ stetig bzgl. der jeweiligen Teilraumtopologien $\mathcal{O}_{X_0}$ und $\mathcal{O}_{Y_0}$.

Beweis: Sei $P \in \mathcal{O}_{Y_0}$, dann ist $f|_{X_0}^{-1}(P) = X_0 \cap f^{-1}(P)$, und $\exists\, U \in \mathcal{O}_Y : P = U \cap Y_0$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid \\ X_0 & \xrightarrow[f|_{X_0}]{} & Y_0 \end{array}$$

Also ist $f^{-1}(P) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(Y_0)$

und damit $f|_{X_0}^{-1}(P) = \underbrace{f^{-1}(U)}_{\in \mathcal{O}_X} \cap \underbrace{f^{-1}(Y_0) \cap X_0}_{X_0}$

$$\Rightarrow f|_{X_0}^{-1}(P) \in \mathcal{O}_{X_0} \qquad \square$$

Bsp.: Für $X_0 \subseteq X$ ist die „Inklusion" $\iota: X_0 \to X$, $x \mapsto x$ stetig, da sie eine Einschränkung der Identität ist, d.h. $\iota = f|_{X_0}$ mit $f: X \to X$, $x \mapsto x$.