Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 13

Notiztitel 25.07.2011

Hilfsmittel Klausur: 2 selbsterstellte Din A4 Blätter

Existenz und Eindeutigkeit von Lsg gewöhnlicher Dgln

$$\dot{x} = F(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

Eindeutigkeit: F lokal Lipschitzstetig (bzgl x)

$\Rightarrow$ Lösungen sind eindeutig

Existenz: F lokal Lipschitzstetig

$\Rightarrow$ Lösungen existieren lokal

F global Lipschitzstetig

$\Rightarrow$ Lösungen existieren auf ganz $\mathbb{R}$

Lipschitzstetigkeit von F (bzgl. x)

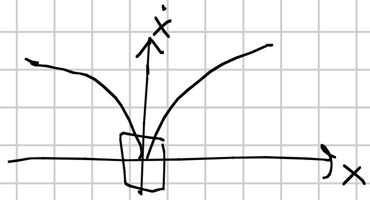
global: Es gibt ein $L>0$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \, \forall t \in \mathbb{R}: \|F(x,t) - F(y,t)\| < L\|x-y\|$

lokal: zu $R, a > 0$ gibt es $L_{R,a} > 0$

$$\forall x,y \in B_R(0) \; \forall t \in]-a,a[: \|F(x,t) - F(y,t)\| < L_{R,a}\|x-y\|$$

Aus $F(x,t)$ in C^1 folgt lokale Lipschitzstetigkeit

Gegenbeispiel zur Eindeutigkeit $\quad n=1$



$$\dot x = 2\sqrt{|x|} \qquad x(t) \in \mathbb{R}$$

Trennung der Variablen $\quad \int \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = t - t_1 = \sqrt{|x(t)|}$

$$\overset{\shortparallel}{\sqrt{x}} \quad x>0$$

$$\sqrt{-x} \quad x<0$$

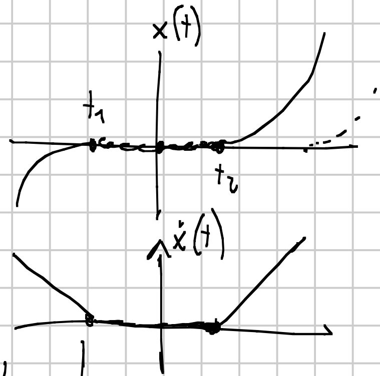
$$|x(t)| = (t-t_1)^2$$

Lokale Lösungen:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \\ (t-t_1)^2 & t \geq t_1 \\ -(t-t_1)^2 & t \leq t_1 \end{cases}$$

Globale Lösungen $\quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad t_1 \leq t_2 \qquad t \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \begin{cases} -(t-t_1)^2 & t < t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ (t-t_2)^2 & t_2 < t \end{cases}$$



zu AW $x(0)=0$ gibt es unendlich viele Lsgn!

Gegenbeispiel zu Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$

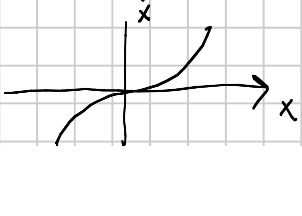
(i) $\quad \dot x = -\frac{1}{x} \qquad$ Trennung. $\quad -\frac{1}{2}x^2 = t - t_1$

$$x(t) = \pm\sqrt{2(t_1 - t)} \qquad t < t_1$$

keine Fortsetzung für $t \geq t_1$

$x=0$ nicht definiert

(ii) $\quad \dot x = x^3 \qquad$ Trennung: $\quad -\frac{1}{2x^2} = t - t_1$



$$x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2(t_1 - t)}} \qquad t < t_1$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad n=2, m=1$ $\quad f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\quad f(0,0)=0$

$f(t,t) = 0$

$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y)$ $\quad f(t,0) = 1$

$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0) \quad f(x_n,y_n) = 1 \neq 0 = f(0,0)$

$f(x,y) = xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad f(0,0) = 0$ $\quad \|(x,y)\| \to 0$

$$|f(x,y)| = \underbrace{|x|}_{\leq \sqrt{x^2+y^2}} \underbrace{|y|}_{\leq \sqrt{x^2+y^2}} \underbrace{\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1} \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \|(x,y)\|^2 \leq 1 \cdot \|(x,y)\| \to 0$$

falls $\|(x,y)\| \leq 1$

Vermutung: $Df(0,0) = A = (0\ 0) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$

$$\frac{\left| f(x,y) - \left(f(0,0) + A\binom{x}{y}\right)\right|}{\|(x,y)\|} \leq \|(x,y)\| \xrightarrow{\|(x,y)\|\to 0} 0$$

Lagrange

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu maximieren unter NB $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad m<n$

(-1) stetig $\quad f(x) = 0$

$h_\lambda(x) = h(x) - \langle \lambda, f(x)\rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}^m$

Löse $n+m$ Gl.: $\quad \nabla h_\lambda(x) = 0 \quad$ n Gl. $\quad x_1, \dots x_k$ (1)

$f(x) = 0 \quad$ m Gl. $\quad$ Sind Kandidaten für Extremwerte.

(0.) Gibt es andere Kandidaten? Nein, wenn $\underbrace{Df(x)}_{\mathbb{R}^{m\times n}}$ vollen Rang hat für $f(x)=0$

$(m=1$: Überprüfe, dass $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ falls $f(x) = 0$

(2) absolute Maxima oder Minima: $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt

(3) Werte $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ aus und vergleiche $\square$