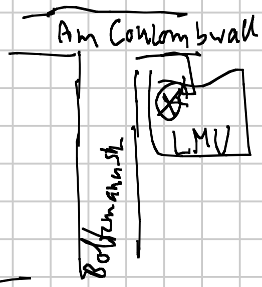
Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 11

Notiztitel 11.07.2011

Vorlesung: Mittwoch 13.7.: $12^{\underline{00}}$ im LMU-Hörsaal Am Coulombwall



269. Explizit: $\dot{x} = f(x,t)$ $\quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ C^1

Implizit: $(*)\ F(x, \dot{x}, t) = 0 \in \mathbb{R}^n$ $\quad F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ C^1

$x: I \to \mathbb{R}^n$ $\quad F(x,v,t)$, $x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$

(a) AWP $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Umwandlung von $(*)$ in explizite Dgl.

- Es muss ein $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $F(x_0, v_0, t_0) = 0$.
- Es muss $\frac{\partial F}{\partial v}(x_0, v_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar sein

Dann gibt es ein $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, C^1, mit

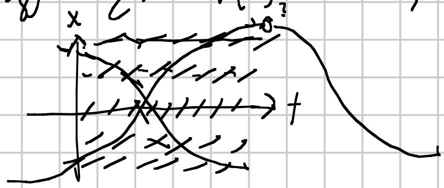
$$g(x_0, t_0) = v_0 \text{ und } F(x, g(x,t), t) = 0 \quad \forall (x,t) \in B_\epsilon(x_0, t_0).$$

Somit ist jede lokale Lösung von $\dot{x} = g(x,t)$ mit $x(t_0) = x_0$ auch eine Lösung von $(*)$ und umgekehrt, denn

$$F(x(t), g(x(t),t), t) = 0 \quad \forall t \in B_\delta(t_0)$$

Bsp: $E = \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + V(x(t))$ (Energieerhaltung): $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) - E = 0$, $x(t) \in \mathbb{R}$

Auflösen $\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$



(b) $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, $x_0 = 0$, $g(x_0) = 0$. Linearisierung:

$F(x, \dot{x}, t) = F(x, \dot{x})$. Explizit: $\dot{x} = g(x)$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = g(x) = g(x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) = Dg(x_0)\,x = Ax$$

$$A = Dg(x_0) = -\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial v}(x_0, g(x_0))\right)^{-1}}_{n \times n} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}_{n \times n}.$$

$\dot{x} = f(x, t)$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,t) \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$

nicht autonom im $\mathbb{R}^n$ $\iff$ autonom im $\mathbb{R}^{n+1}$

---

170. $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(a) AWP: $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$

Existenz: $e^{At} x_0$

Eindeutigkeit: Sei $y(t) = e^{-At} x(t)$, wobei $x(t)$ Lsg des AWP

$$\dot{y}(t) = -Ae^{-At} x(t) + e^{-At} \dot{x}(t) = \left(-Ae^{-At} + e^{-At} A\right) x(t) \overset{(*)}{=} 0$$

$(*)$ $AA^n = A^{n+1} = A^n A$.

Außerdem $y(0) = x(0) = x_0 \Rightarrow y(t) = x_0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t) = e^{At} x_0$

(b) Seien $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ Lsgen von $\dot{x} = Ax$ mit $(x_1(0), \dots, x_n(0))$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$e^{At} = (x_1(t) \cdots x_n(t))(x_1(0) \cdots x_n(0))^{-1}$$

und damit ist $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ Basis des $\mathbb{R}^n$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Bew: Auf geeigneter Basis

$$\left(x_1(t) \cdots x_n(t)\right)\left(x_1(0) \cdots x_n(0)\right)^{-1} x_j(0) = \left(x_1(t) \cdots x_n(t)\right)\left(\begin{array}{c|l} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \leftarrow j\text{-Zeile} \end{array}\right) = x_j(t)$$

$$e^{At} x_j(0) = x_j(t) \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

$\Rightarrow$ Gleichheit.

$$\left(x_1(t) \cdots x_n(t)\right) = e^{At}\left(x_1(0) \cdots x_n(0)\right)$$

$\Rightarrow$ $\left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)$ bilden eine Basis.

(c) Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis aus EV von A, jeweils zu den EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so ist $e^{At} = B \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right) B^{-1}$, wobei $B = (b_1 \cdots b_n)$

Bew: $$B\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix} B^{-1} b_j = B\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix} e_j = B\, e^{\lambda_j t} e_j = e^{\lambda_j t} b_j$$

$$e^{At} b_j = e^{\lambda_j t} b_j \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

(d) Ist A symmetrisch und $(b_1, \ldots, b_n)$ ist schon ONB, dann ist

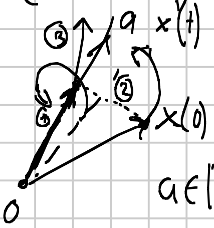
$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k b_k^T \qquad e^{At} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} b_k b_k^T$$

Bew: $$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k b_k^T\right) b_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k \delta_{kj} = \lambda_j b_j = A b_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} b_k b_k^T\right) b_j = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} b_k \delta_{kj} = e^{\lambda_j t} b_j = e^{At} b_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$\square$

171.



$a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$x(t) = \underbrace{\frac{a \cdot x}{\|a\|^2} a}_{①} + \underbrace{\left(x - \frac{a \cdot x}{\|a\|^2} a\right) \cos(\|a\| t)}_{②} \cancel{+} \underbrace{\frac{x \times a}{\|a\|} \sin(\|a\| t)}_{③}$$

$-?$

AWP $\quad \dot{x} = a \times x, \quad x(0) = x_0$

$$\dot x = \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Beh: $e^{At}x = x(t)$

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\|a\| \left(x - \frac{a \cdot x}{\|a\|^2} a \right) \sin(\|a\| t) \cancel{+} \|a\| \frac{x \times a}{\|a\|} \cos(\|a\| t)$$

$$\left[\frac{d}{dt} e^{At} x = A e^{At} x = \right.$$

$$A x(t) = a \times x(t) = a \times x \cos(\|a\| t) + \frac{1}{\|a\|} \overbrace{a \times (x \times a)}^{\|a\|^2 x - (a \cdot x) a} \sin(\|a\| t)$$

$$= \|a\| \left(x - \frac{a \cdot x}{\|a\|^2} a \right) \sin(\|a\| t) + (a \times x) \cos(\|a\| t)$$

$$= \frac{d}{dt} x(t) \quad \text{für bel } x(0)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{At} x(0)$$

Vorzeichen. Vorzeichenfehler in Angabe

---

172. Lineare Dgl höherer Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots a_1 x' + a_0 x = 0. \qquad (*)$$

Ist λ k-fache Nullst des char. Polynoms, so sind $x_{\lambda,i}(t) = t^i e^{\lambda t}$, $i = 0, \dots, k-1$ Lsg von $(*)$

Lösung: charakteristisches Polynom faktorisiert:

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_n) \cdots (\lambda - \lambda_1)$$

Die Diffgl. kann man schreiben

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_n \right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1 \right) x(t)$$

Per Induktion nach k: $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1 \right)^k \left(t^j e^{\lambda_1 t} \right) = 0$ für $j = 0, \dots, k-1$

$$k=1 \quad \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1 \right) e^{\lambda_1 t} = \frac{d}{dt} e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = 0$$

$k \to k+1$: $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^{k+1} t^j e^{\lambda_1 t} = 0$ für $j = 0, \dots, k-1$

z.z. $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)^{k+1} \left(t^k e^{\lambda_1 t}\right) = 0$

dazu $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(t^k e^{\lambda_1 t}\right) = k\, t^{k-1} e^{\lambda_1 t} + t^k \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 t^k e^{\lambda_1 t} = k t^{k-1} e^{\lambda_1 t}$.