Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 4

Notiztitel 23.05.2011

130. $A \subset \mathbb{R}^d$ wegzush. mit

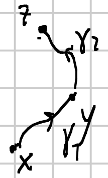
$$d(x,y) := \inf\{L(\gamma) : \gamma : [0,1] \to A \text{ stetig mit } \gamma(0)=x, \gamma(1)=y\} < \infty.$$

Beh (A,d) ist metrischer Raum.

Bew: (i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,x) = 0$ $(\gamma(t) = x)$. Wegen der Definition der Weglänge gilt $d(x,y) \geq \|x-y\|$. Somit

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y$$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$, denn wenn $\gamma : [0,1] \to A$ x mit y stetig verbindet, dann verbindet $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ y mit x.



(iii) Δ-Ungl. $x,y,z \in A$, verbinde γ_1 x mit y und γ_2 y mit z.

Dann verbindet $\tilde{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2$ den Punkt x mit z wobei

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t-1) & t \in]\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Somit ist

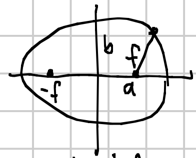
$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$$

$$\inf\{L(\tilde{\gamma}) : \tilde{\gamma} \text{ verbindet } \overset{\text{in } A}{x \text{ mit } z}\} \leq \inf\{L(\gamma_1) \overset{\gamma_1}{:} \text{verb. } x \text{ mit } y \text{ in } A\}$$
$$+ \inf\{L(\gamma_2) : \gamma_2 \text{ verb } y \text{ mit } z \text{ in } A\}$$

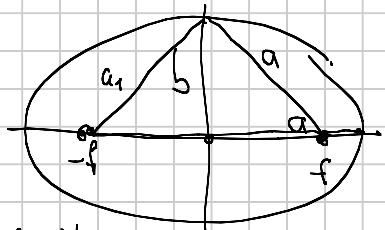
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$\Rightarrow$ Beh.

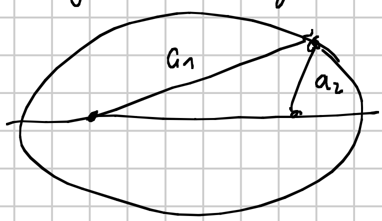
131. Ellipse $C=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$, $0<b<a$



(a) Für $(x,y)\in C$ ist die Summe der Abstände zu den beiden Brennpunkten $(\pm f,0)$, $f=\sqrt{a^2-b^2}$, konstant gleich $2a$.



Bew: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $\|(x-f,y)\|+\|(x+f,y)\|=2a$ gilt:



(1) $y^2+(x+f)^2=a_1^2$

(2) $y^2+(x-f)^2=a_2^2$

(3) $a_1+a_2=2a$

Summe und Differenz von (1) und (2)

(−) $4xf=a_1^2-a_2^2=2a(a_1-a_2) \Leftrightarrow a_1-a_2=\frac{2xf}{a}$

(+) $2y^2+2x^2+2f^2=a_1^2+a_2^2$

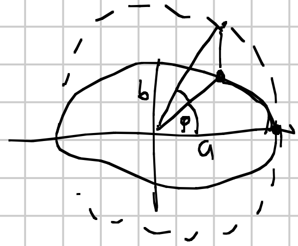
$\Leftrightarrow$ $a_1=a+\frac{xf}{a}$, $a_2=a-\frac{xf}{a}$ und (+)

$\Leftrightarrow$ $y^2=-x^2-f^2+\frac{1}{2}\left(a+\frac{xf}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(a-\frac{xf}{a}\right)^2=$

$-x^2-a^2+b^2+a^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$

bzw $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

b) Parametrisiere C nach Bogenlänge:

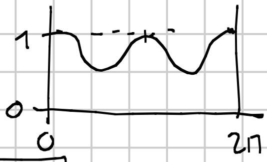


Standardparametrisierung $\gamma(t)=\begin{pmatrix}a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix}$

Bogenlänge

$$s(t)=\int_0^t\|\dot\gamma(\varphi)\|\,d\varphi=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$\boxed{E_h(t) = \int_0^t \sqrt{1-h^2\sin^2\phi}\,d\phi} \quad , h\in\,]0,1[$$



$$= \int_0^t \sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\phi}\,d\phi = a\int_{\pi/2}^{t+\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\phi}\,d\phi =$$

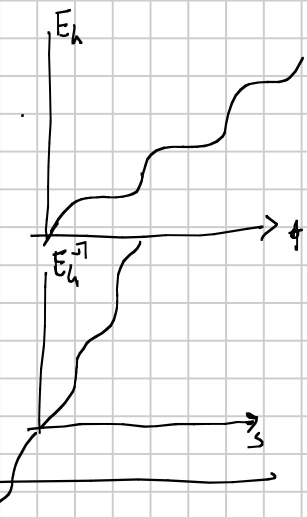
$$= a\,E_h\left(t+\frac{\pi}{2}\right) - a\,E_h\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad h=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\in\,]0,1[$$

E_h ist smw, es existiert also E_h^{-1}, die Umkehrfkt.

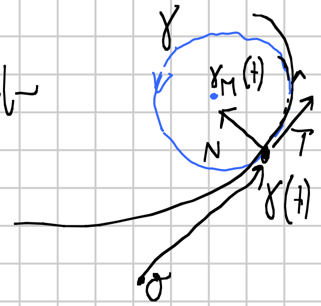
$$\boxed{s = aE_h(t)}$$
$$\boxed{t = E_h^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)}$$

Eine Parametrisierung nach Bogenlänge ist z.B.

$$\tilde\gamma(s) = \gamma\left(E_h^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)\right) = \begin{pmatrix} a\cos E_h^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) \\ b\sin E_h^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)\end{pmatrix}.$$



13.5. Evolute einer Kurve



Kurve γ. Evolute ist die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte

$$\gamma_M(t) = \gamma(t) + \frac{\|\dot\gamma(t)\|^2}{\dot\gamma_1(t)\ddot\gamma_2(t)-\ddot\gamma_1(t)\dot\gamma_2(t)}\begin{pmatrix}-\dot\gamma_2(t)\\ \dot\gamma_1(t)\end{pmatrix}$$

(a) t_0 fest. Kreis mit Radius $\frac{1}{|\kappa_\gamma(t_0)|}$ um $\gamma_M(t)$, der im Punkt $\gamma(t_0)$ den gleichen Tangentialeinheitsvektor wie γ besitzt, hat in $\gamma(t_0)$ die gleiche Krümmung

Bew: Motivation: Radius des Krümmungskreis $\overset{R(t)}{\hat{=}} \frac{1}{|\kappa(t)|} = \left|\frac{\|\dot\gamma(t)\|^3}{\dot\gamma_1(t)\ddot\gamma_2(t)-\ddot\gamma_1(t)\dot\gamma_2(t)}\right|$

$$\gamma_M(t) = \gamma(t) + \operatorname{sgn}(\kappa(t)) R(t) N(t)$$

Krümmungskreis als Kurve

$$\gamma_K(s) = \gamma_M(t_0) + \frac{1}{|\kappa_\gamma(t_0)|}\left(-\operatorname{sgn}(\kappa_\gamma(t_0))\cos s\, N(t_0) + \sin s \quad T(t_0)\right)$$

Es gilt $\gamma_K(0) = \gamma(t_0)$, $\dot{\gamma}_K(0) = \frac{1}{|\kappa_\gamma(t_0)|} T(t_0)$

Aus Vorl.: $|\kappa_{\gamma_K}| = \frac{1}{R(t_0)} = |\kappa_\gamma(t_0)|$. Vorzeichen stimmen überein

(b) $\{y = \frac{1}{2}x^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x^2\}$. Parametrisierung:

$$\gamma(t) = (t, \tfrac{1}{2}t^2).\ \dot{\gamma}(t) = (1,t),\ \ddot{\gamma}(t) = (0,1).\ \text{Somit}$$

$$\gamma_M(t) = \gamma(t) + \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}{\dot{\gamma}_1(t)\ddot{\gamma}_2(t) - \ddot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t)}\begin{pmatrix}-\dot{\gamma}_2(t)\\ \dot{\gamma}_1(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\ \frac{1}{2}t^2\end{pmatrix} + \frac{1+t^2}{1\cdot 1 - 0\cdot t}\begin{pmatrix}-t\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t^3\\ 1+\frac{3}{2}t^2\end{pmatrix}$$

Um $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ verschobene Neilsche Parabel

WWW: Suche nach „MatheVital Evolute“