Mathematik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 3

Notiztitel 16.05.2011

Mi 10–12 FVV vorlesungsfrei

$\Rightarrow$ Tutorgruppe fällt aus

ZÜ wieder um 12:30 bis 14:00

---

124. Stetigkeit der Umkehrfkt

$$K \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M$$

K, M metrische Räume, K kompakt

Beh: $f: K \to M$ stetig und bijektiv $\Rightarrow f^{-1}$ stetig

d.h. f ist ein Homöomorphismus

Bew: Sei $(y_n) \subset M$ mit $y_n \to y \in M$. z.z. $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$ in K.

K kp $\Rightarrow$ es gibt TF $f^{-1}(y_{n_k}) \longrightarrow x \in K$.

f stetig $\Rightarrow$ $f(x) \overset{f \text{ stetig}}{=} f\left(\lim_{k\to\infty} f^{-1}(y_{n_k})\right) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$

Annahme: $(f^{-1}(y_n))$ konvergiert nicht gegen $f^{-1}(y)$.

Dann gibt es $\epsilon > 0$ und unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f^{-1}(y_n) \notin B_\epsilon(f^{-1}(y)).$$

Darunter gibt es keine TF $(f^{-1}(y_{\tilde{n}_i}))$ deren Grenzwert wieder $x = f^{-1}(y)$ ist. Widerspruch.

12.5. Modifikation einer Metrik

(M,d) metr. Raum

(a) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ stetig, streng monoton wachsend und konkav und $f(0)=0$. Dann ist $(M,\tilde{d})$ mit $\tilde{d} = f \circ d$ ein metr. Raum

$\tilde{d}$ erfüllt Metrikaxiome

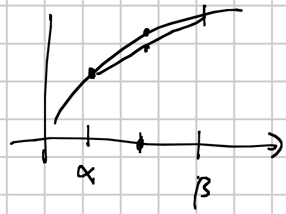
(i) z.z. $\tilde{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$

Es gilt $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$, also

$$0 = \tilde{d}(x,y) = f(d(x,y)) \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$$

(ii) Symmetrie $\tilde{d}(x,y) = f(d(x,y)) = f(d(y,x)) = \tilde{d}(y,x)$

(iii) z.z. $\tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z) \geq \tilde{d}(x,z)$

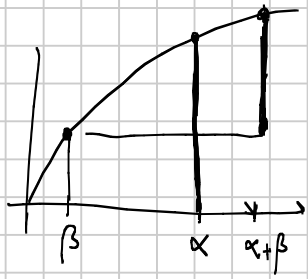


Bew: f konkav $\lambda \in [0,1]$

$$(1-\lambda) f(\alpha) + \lambda f(\beta) \leq f((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta)$$

Wir wollen zeigen, dass für $0 \leq \alpha, \beta$

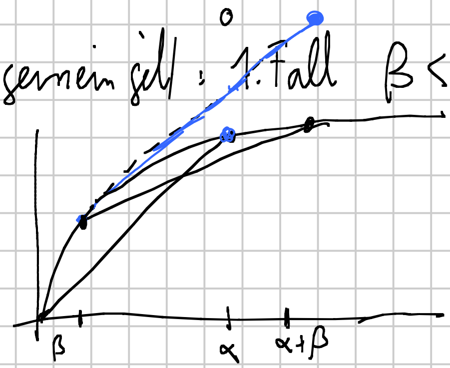
$$f(\alpha) \geq f(\beta+\alpha) - f(\beta)$$

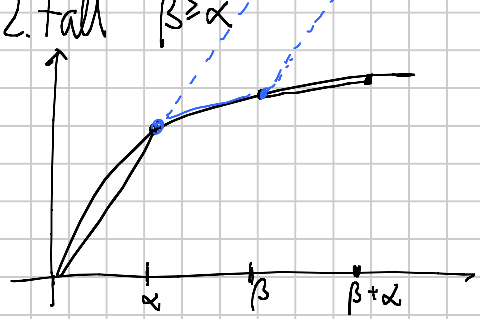


Sei f zweimal stetig diffbar. Dann $f'' \leq 0$, also ist f' monoton fallend. Damit

$$f(\alpha) = \int_0^\alpha f'(x)\,dx \geq \int_0^\alpha f'(x+\beta)\,dx = \int_\beta^{\alpha+\beta} f'(x)\,dx = f(\beta+\alpha) - f(\beta)$$

Allgemein gilt: 1. Fall $\beta < \alpha$ 2. Fall $\beta \geq \alpha$





Δ-Ungl.

$$\tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z) = f(\underbrace{d(x,y)}_{\alpha}) + f(\underbrace{d(y,z)}_{\beta}) \geq f(\underbrace{d(x,y)+d(y,z)}_{\geq d(x,z)}) \geq f(d(x,z)) = \tilde{d}(x,z) \quad \square$$

(b) Beh: $x_n \to x$ bezüglich d $\Leftrightarrow$ $x_n \to x$ bezüglich $\tilde{d}$

Bew: f stetig, smw $\Rightarrow$ Umkehrfkt f^{-1} existiert und ist stetig, da $f: [0,\alpha] \to f([0,\alpha])$ Homöomorphismus ist.

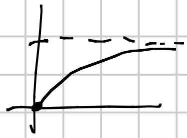
Insbesondere: $x_n \to 0 \Leftrightarrow f(x_n) \to f(0) = 0$. Somit gilt für jede Folge $(a_n) \subset M$ gilt also

$$d(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow f(d(x_n, x)) \to 0 \Leftrightarrow \tilde{d}(x_n, x) \to 0$$

(c) Aus (x_n) Cauchy-Folge bezüglich $\tilde{d}$ folgt (x_n) ist CF bezüglich d

Bew: (x_n) CF bzgl. $\tilde{d} \Leftrightarrow \operatorname{diam}^{\tilde{d}}(x_{n+\mathbb{N}_0}) \to 0 \Leftrightarrow \operatorname{diam}^{d}(x_{n+\mathbb{N}_0}) \to 0$

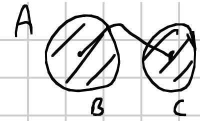
$\Leftrightarrow (x_n)$ CF bzgl d.

Bsp: $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, d.h. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ wird zu $(\mathbb{R}, \tilde{d})$ mit 

$\tilde{d}(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Es gilt f.a. $x,y \in \mathbb{R}$ dass $\tilde{d}(x,y) < 1$

d.h. $\mathbb{R}$ ist bezüglich $\tilde{d}$ beschränkt und abgeschlossen aber nicht kompakt! $x_n = n$ besitzt keine konvergente TF weil $\forall n,m \quad \tilde{d}(n,m) \geq \frac{1}{2}$ $\square$

12G. Wegzusammenhang, Gebiete im $\mathbb{R}^d$



Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. A heißt wegzusammenhängend, wenn es zu jedem $x, y \in A$ ein stetiges $\gamma : [0,1] \to A$ gibt mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

(a) Ist A wegzush, so auch zush.

Bew: Sei A nicht zush., d.h. es gibt $B, C \neq \emptyset, B \cap C = \emptyset, B \cup C = A$ die bezüglich A zugleich offen und abgeschl. sind

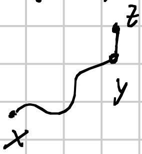
Annahme: A ist wegzush.. Dann gibt es $x \in B, y \in C, \gamma : [0,1] \to A$ stetig mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. $B' = \gamma^{-1}(B)$, $C' = \gamma^{-1}(C)$ sind nichtleer, disjunkt, $B' \cup C' = [0,1]$ und B' und C' offen und abgeschl in $[0,1]$, also ist $[0,1]$ unzusammenh. W

(b) Ist A zusammenhängend und offen so ist A wegzush.

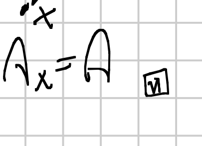
Bew: A sei oE nichtleer. $x \in A$. Sei

$$A_x := \{ y \in A \mid \text{es gibt stetiges } \gamma : [0,1] \to A, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \}$$

$A_x \neq \emptyset$, weil $x \in A_x$, A_x ist offen: Zu $y \in A_x$ gibt es $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(y) \subset A$. Zu $z \in B_\epsilon(y)$ verbindet $\tilde{\gamma}(t) = y + t(z - y)$ die Punkte y und z stetig. Damit gibt es stetige Verbindung von x mit z, also $z \in A_x$



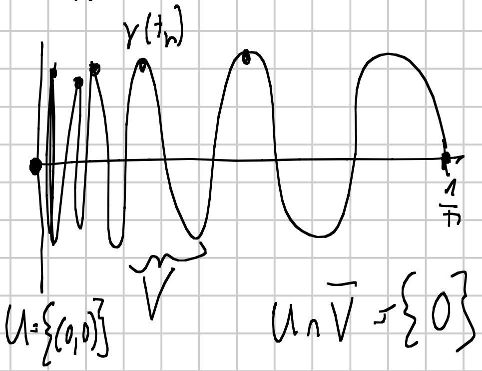
Außerdem ist $A \setminus A_x$ offen. Denn zu $y \in A \setminus A_x$ gibt es wieder $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(y) \subset A$. Könnte $z \in B_\epsilon(y)$ stetig mit x verbunden werden, so auch y. Also $z \in A \setminus A_x$



$\Rightarrow$ A_x nichtleer, offen und abg. bzgl A ist $\underset{A \text{ zush}}{\Rightarrow}$ $A_x = A$ $\boxed{\text{M}}$

$f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $x>0$

$G_f = \{(x, f(x)) : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$



G_f ist zush.

G_f ist nicht wegzusammenh.

Annahme Sei $\gamma:[0,1]\to G_f$ stetig mit $\gamma(0)=(0,0)$, $\gamma(1)=(\frac{1}{\pi},0)$

.... γ