Mathematatik 3 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 2

Notiztitel 09.05.2011

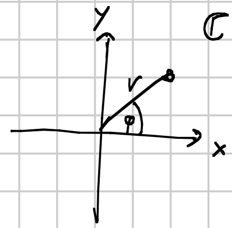
1. 16.5.: ZÜ Beginn: 12:15
2. Neu: T06 Do 10-12

   Kapazität noch am Dienstag

obenrechts

3. Hausaufgaben: Erste Zeile | Name Mat.Nr. | Gruppe |

Blatt 3: A125(a) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$



Hinweise: 127: Höhenlinien von f zeichnen

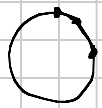
128. $z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \quad z = x + iy = re^{i\varphi}$

$r = |z|, \quad \varphi = \arg(z) \in]-\pi, \pi]$

in C: atn2 (x,y)

$P \cong \exp$

$P^{-1} \cong \mathrm{Log}$ (Hauptzweig)

129 

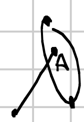
---

117 $A \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt, wenn $A \subset B_R(0)$ für ein $R > 0$

Beh: A beschr $\iff \operatorname{diam}(A) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in A\} < \infty$

"$\Rightarrow$" Sei $R > 0$ und $A \subset B_R(0)$. Dann ist für $x, y \in A$

$$\|x - y\| \overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} \|x\| + \|y\| \leq 2R$$



$\Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leq 2R < \infty$

"$\Leftarrow$" Sei $\operatorname{diam} A =: D < \infty$. Ist $A = \emptyset$, so ist $A \subset B_1(0)$.

Andernfalls sei $x \in A$. Dann gilt für bel. $y \in A$

$$\|y\| \le \|y-x\| + \|x\| \le \|x\| + D$$

Also ist $A \subset B_R(0)$ wobei $R := \|x\| + D + 1$

---

118 $(x^{(n)}) \subset \mathbb{R}^d$. Beh: $(x^{(n)})$ ist CF $\iff$ $(x_j^{(n)}) \subset \mathbb{R}$ ist CF für $j \in 1,..,d$

Bew: "$\Rightarrow$" Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $|x_j| \le \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$

also für $j \in \{1,..,d\}$: $0 \le \operatorname{diam}\left(x_j^{(n+N_0)}\right) \le \operatorname{diam}\left(x^{(n+N_0)}\right) \to 0$

"$\Leftarrow$" Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $\|x\| \le \sqrt{d} \max_{j \in \{1,..,d\}} |x_j|$

also: $0 \le \operatorname{diam}\left(x^{(n+N_0)}\right) \le \sqrt{d} \max_{j \in \{1,..,d\}} \operatorname{diam}\left(x_j^{(N_0+n)}\right) \to 0$

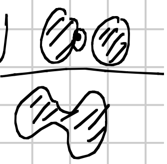
---

119 (M,d) metr. Raum. $N \subset M$. (N,d') $d' = d|_{N \times N} : N \times N \to \mathbb{R}_0^+$

Zu $A \subset M$ sei $A' = A \cap N \subset N$. Zu $B \subset N$ ist auch $B \subset M$.

Bemerkungen: 1. Die offene Kugel $B'_\epsilon(x)$ um x ist

$$B'_\epsilon(x) = \{ y \in N \mid d(x,y) < \epsilon \} = B_\epsilon(x) \cap N$$



2. (M,d) ist genau dann zusammenhängend, wenn $M, \emptyset$ die einzigen offenen und zugleich abgeschlossenen Mengen sind.

$$\mathbb{R}^2 = M \supset N = \overline{B_1((-2,0))} \cup \overline{B_1((2,0))}$$

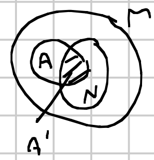
$$B'_\epsilon(-1,0) = B_\epsilon(-1,0) \cap N \subset N \qquad \epsilon = \frac{1}{2}$$

Ann: (M,d) ist nicht zusammenhängend $\Rightarrow \emptyset \neq A, B \subset M$ $A \cup B = M$

und $A \cap \overline{B} = \emptyset$ und $\overline{A} \cap B = \emptyset$

Dann ist $A=\bar{A}$. Andernfalls gäbe es ein $x\in\bar{A}\setminus A\subset B$
mit $x\in\bar{A}\cap B$ ↯ Analog ist $B=\bar{B}$ also A offen
d.h. $\emptyset\subsetneq A\subsetneq M$ ist offen und abgeschlossen.

(M,d) (N,d') $N\subset M$



$\overset{\cup}{A}$ offen in M $\Rightarrow$ A' $\overset{\text{relativ}}{}$ offen in N

$(B_\epsilon(x)\subset A \Rightarrow B'_\epsilon(x)\subset A')$

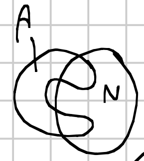
A abgeschl in M $\Rightarrow$ A' abgeschl in N ($M\setminus A$ ist offen)

A beschränkt in M $\Rightarrow$ A' beschränkt in N (klar)

A kompakt in M $\not\Rightarrow$ A' kompakt in N $\quad B_1(0)\subset\mathbb{R}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\cup}{[0,1[}$ nicht kp $\quad \overset{\cup}{[0,1]}$ kp

A zsh. in M $\not\Rightarrow$ A' zsh in N



$N=[0,1]\subset\mathbb{R}=M$

Ist $B\subset N$, so gilt

B offen in N $\not\Rightarrow$ B offen in M

B abg in N $\not\Rightarrow$ B abg. in M

B beschränkt in N $\Leftrightarrow$ B beschränkt in M

B kompakt in N $\Leftrightarrow$ B kompakt in M

(jede Folge in B besitzt konvergente Teilfolge in B)

B Folgenkompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge in B besitzt eine in B konvergente TF

B zusammenhängend in N $\Leftrightarrow$ B zusammenhängend in M

$\emptyset\neq A\subset B$ offen und abgeschlossen bzgl (B,d'') $\Rightarrow$ $A=B$

Bem: $i: N\to M$, $i(x)=x$, stetig und injektiv. $A'=i^{-1}(A)$

vgl. M23 $\quad N\supset B=i(B)\subset M$

120. Äquivalenz der Stetigkeitsbegriffe

(M,d) $(N,\tilde{d})$. $f: M \to N$

Beh: Sei $x \in M$ $\quad \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y \in B_\delta(x) \Rightarrow f(y) \in B_\epsilon(f(x))$

$\Leftrightarrow$ Sei $(x_n) \subset M$ mit $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

"$\Rightarrow$" Gelte f.a. $x \in M$: $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y \in M: d(x,y) < \delta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(y)) < \epsilon$

Sei $M \ni x_n \to x \in M$. Z.z. $f(x_n) \to f(x)$

Sei $\epsilon > 0$. Es gibt $\delta > 0$, sodass aus $d(x,y) < \delta$ schon $\tilde{d}(f(x), f(y)) < \epsilon$ folgt. Zu diesem δ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ s.d. f.a. $n \geq N$ gilt: $d(x_n, x) < \delta$ $\Rightarrow \tilde{d}(f(x_n), f(x)) < \epsilon$.

"$\Leftarrow$" Es gelte für alle konv. Folgen $(x_n) \subset M$, dass

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) \qquad x := \lim_{n \to \infty} x_n$$

Ann. Es gibt ein $\epsilon > 0$ sodass für alle $\delta > 0$ ein $y \in M$ existiert mit $d(x,y) < \delta$ aber trotzdem $\tilde{d}(f(x), f(y)) \geq \epsilon$

Wähle $\delta = \frac{1}{n}$ und sei x_n ein solches y. Dann gilt

$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \to 0$ d.h. $x_n \to x$ aber

$\tilde{d}(f(x), f(x_n)) \geq \epsilon$, also $f(x_n) \not\to f(x)$ $\quad ⚡ \quad \square$