....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Prof. Dr. H. Spohn

12. Oktober 2011, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **70 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Tangentialvektor und Krümmung** **(4 Punkte)**
Berechnen Sie den Einheitstangentialvektor T und den Krümmungsradius r der Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos 2t, t, \sin 2t)$, im Punkt $t = \pi/2$.

$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$r = \frac{5}{4}$

LÖSUNG:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ 1 \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}, \quad \ddot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -4\cos 2t \\ 0 \\ -4\sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\dot\gamma(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \ddot\gamma(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \frac{\dot\gamma(\frac{\pi}{2})}{\|\dot\gamma(\frac{\pi}{2})\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; \kappa = \frac{\|\dot\gamma(\frac{\pi}{2}) \times \ddot\gamma(\frac{\pi}{2})\|}{\|\dot\gamma(\frac{\pi}{2})\|^3} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{4}{5}, \; r = \frac{1}{\kappa}.$$

2. **Taylorformel** **(8 Punkte)**
Gegeben ist die unendlich oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $f(1,1) = 4$ und

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} (1+x)e^{x-y^2} \\ -2xy\, e^{x-y^2} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Hessematrix von f an der Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **(2)**

$$H_f(x,y) = \quad e^{x-y^2} \begin{pmatrix} 2+x & -2(1+x)y \\ -2(1+x)y & 2x(2y^2-1) \end{pmatrix}$$

(b) Wie lautet die Taylorentwicklung von $(u,v) \mapsto f(1+u, 1+v)$ bis zur zweiten Ordnung an der Stelle $(u,v) = (0,0)$ als Polynom in u und v? **(6)**

$$f(1+u,1+v) = \left\{ \begin{matrix} 4 + \binom{2}{-2} \cdot \binom{u}{v} + \frac{1}{2}\binom{u}{v} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\binom{u}{v} \\ \text{oder} \\ 4 + 2u - 2v + \frac{3}{2}u^2 - 4uv + v^2 \end{matrix} \right\} + \mathcal{O}(\|\tbinom{u}{v}\|^3)$$

LÖSUNG:

(a) $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix}$, Man berechnet die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{yx} f(x,y) \\ \partial_{xy} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix}$$

(b) $f(1+u,1+v) = f(1,1) + \operatorname{grad} f(1,1) \cdot \binom{u}{v} + \frac{1}{2}\binom{u}{v} \cdot H_f(1,1)\binom{u}{v} + \mathcal{O}(\|\binom{u}{v}\|^3)$

3. **Globale Maxima und Minima** **(17 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 6)(x + y) + 2.$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f und entscheiden Sie, ob diese isolierte Maxima oder Minima sind.
HINWEIS: Betrachten Sie zunächst die Differenz der beiden sich ergebenden Gleichungen.

(b) Sei nun $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 6\} \subset \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass $\max f(B) = f(-1, -1)$.

LÖSUNG:

(a) f ist als Polynom beliebig oft differenzierbar. Stationäre Punkte sind Lösungen von **[2]**

$$0 = \operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(x + y) + (x^2 + y^2 - 6) \\ 2y(x + y) + (x^2 + y^2 - 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 2xy + y^2 - 6 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 - 6 \end{pmatrix}.$$

Differenz der beiden Gleichungen ergibt $2(x - y)(x + y) = 0$, also $x = y$ oder $x = -y$.
1.Fall, $x = y$: Die erste Gleichung lautet dann $6x^2 - 6 = 0$, bzw. $x = y = \pm 1$.
2. Fal, $x = -y$: Die erste Gleichung lautet nun $2x^2 - 6 = 0$, bzw. $x = -y = \pm\sqrt{3}$.
Die stationären Punkte sind also
$P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, -1)$, $P_3 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ und $P_4 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. **[4]**

Die Hessematrix von f ist $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x + 6y \end{pmatrix}$. **[2]**

Nun ist $H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ mit positiver Determinante 48 und positiven Diagonaleinträgen. Somit ist sie positiv definit, P_1 ist ein lokales (isoliertes) Minimum. **[2]**
$H_f(P_2) = -H_f(P_1)$ ist somit negativ definit, P_2 ist ein lokales isoliertes Maximum. **[1]**
$H_f(P_3) = -H_f(P_4) = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ hat offenbar die Eigenwerte $\pm 4\sqrt{3}$ und ist somit indefinit.
P_3 und P_4 sind also Sattelpunkte. **[2]**

(b) f ist stetig auf dem Kompaktum B. Es existiert also ein absolutes Maximum auf B. **[1]**
Kandidaten dafür sind die isolierten Maxima im Inneren von B (also nur P_2) und der Rand von B. **[1]**
Es gilt $f(x, y) = 2$ für $(x, y) \in \partial B = \{x^2 + y^2 = 6\}$ und $f(P_2) = f(-1, -1) = -4 \cdot (-2) + 2 = 10 > 2$. **[1]**
Somit nimmt f auf B sein absolutes Maximum in P_2 an, $\max f(B) = f(P_2)$ **[1]**

4. **Implizit definierte Funktionen** **(9 Punkte)**

Gegeben sind die Gleichungen

$$\sin x + y + z = 0,$$
$$2x - 2\tan y - \sinh z = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass man dieses Gleichungssystem im Ursprung lokal gleichzeitig nach y und z auflösen kann und berechnen Sie die erste Ableitung der so implizit definierten Funktion $x \mapsto g(x)$ im Punkt $x = 0$.

(b) Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems werde im Ursprung lokal als Kurve im $\mathbb{R}^3$ durch x parametrisiert. Geben Sie mit Hilfe von (a) den Einheitstangentialvektor an diese Kurve im Ursprung an.

LÖSUNG:

(a) Das Gleichungssystem entspricht der Gleichung $f(x, y, z) = 0 \in \mathbb{R}^2$ mit der stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin x + y + z \\ 2x - 2\tan y - \sinh z \end{pmatrix}$. **[1]**

Es gilt $f(0, 0, 0) = 0$ und $Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. **[2]**

Die Untermatrix der Jacobi-Matrix von f,

$$\frac{\partial f}{\partial(y, z)}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. **[1]**

Somit sind die Gleichungen nach y und z im Ursprung lokal auflösbar. Die so implizit definierte Funktion $g :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^2$ hat im Ursprung die Ableitung

$$Dg(x) = -\left(\tfrac{\partial f}{\partial(y,z)}(0, 0, 0)\right)^{-1} \tfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

[3]

(b) Die Lösungskurve wird in einer Umgebung des Ursprungs parametrisiert durch **[1]**

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

mit der implizit definierten Funktion $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ aus (a). Somit ist der Einheitstangentialvektor im Ursprung

$$T = \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

[1]

5. **Koordinatentransformationen** **(8 Punkte)**
Sei $U = \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times \{0\})$ und $\Phi : U \to V$ die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} e^{u_1} \cos u_2 \\ e^{u_1} \sin u_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $D\Phi(u)$, das normierte lokale Zweibein $e_{u_1}(u), e_{u_2}(u)$ und $D\Phi^{-1}(\Phi(u))$.

$$D\Phi(u) = e^{u_1} \begin{pmatrix} \cos u_2 & -\sin u_2 \\ \sin u_2 & \cos u_2 \end{pmatrix} \quad \textbf{[2]}$$

$$e_{u_1}(u) = \begin{pmatrix} \cos u_2 \\ \sin u_2 \end{pmatrix} \quad \textbf{[1]}$$

$$D\Phi^{-1}(\Phi(u)) = D\Phi(u)^{-1} = e^{-u_1} \begin{pmatrix} \cos u_2 & \sin u_2 \\ -\sin u_2 & \cos u_2 \end{pmatrix} \textbf{[2]}$$

$$e_{u_2}(u) = \begin{pmatrix} -\sin u_2 \\ \cos u_2 \end{pmatrix} \textbf{[1]}$$

(b) Sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}$. Drücken Sie den Gradienten von $\tilde{f}$ durch Ableitungen von f in der Basis e_{u_1}, e_{u_2} aus.

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} \tilde{f} = D\Phi(u)^{T^{-1}} \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \partial_{u_2} \end{pmatrix} f = e^{-u_1}(e_{u_1}\partial_{u_1} + e_{u_2}\partial_{u_2}) f \quad \textbf{[2]}$$

LÖSUNG:

(a) s.o.

(b) Laut Vorlesung ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} \tilde{f} &= D\Phi(u)^{T^{-1}} \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \partial_{u_2} \end{pmatrix} f = e^{-u_1} \begin{pmatrix} \cos u_2 & -\sin u_2 \\ \sin u_2 & \cos u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \partial_{u_2} \end{pmatrix} f \\ &= e^{-u_1}(e_{u_1}\partial_{u_1} + e_{u_2}\partial_{u_2}) f \end{aligned}$$

6. **Vektorfelder** **(6 Punkte)**

Beweisen Sie für die Vektorfelder $v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeweils stetig partiell differenzierbar, wie in den Übungen, die Identität

$$\nabla \cdot (v \times w) = w \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times w).$$

LÖSUNG:

Es ist
$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (v \times w) &= \sum_j \partial_j \left(\sum_{kl} \epsilon_{jkl} v_k w_l \right) = \sum_{jkl} \epsilon_{jkl} ((\partial_j v_k) w_l + v_k (\partial_j w_l)) \\
&\overset{\substack{\epsilon_{jkl}=\epsilon_{ljk} \\ \epsilon_{jkl}=-\epsilon_{kjl}}}{=} \sum_{jkl} \epsilon_{ljk} w_l (\partial_j v_k) - \sum_{jkl} \epsilon_{kjl} v_k (\partial_j w_l) \\
&= \sum_l w_l (\nabla \times v)_l - \sum_k v_k (\nabla \times w)_k \\
&= w \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times w).
\end{aligned}$$

(6)

7. **Differentialgleichungssystem** **(10 Punkte)**

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t)\,.$$

(a) Das System ist linear, $\dot{x} = A\,x$ mit einer 2×2-Matrix A und der vektorwertigen Funktion $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Wie lautet A? **(1)**

A= $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(b) Geben Sie die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenvektoren von A an. **(4)**

$\lambda_1 = \quad 5$

$b_1 = \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \quad -5$

$b_2 = \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) Sei die Anfangsbedingung $x(0) = \alpha b_1 + \beta b_2$ mit den in (b) bestimmten Eigenvektoren gegeben. Wie lautet die Lösung $x(t)$ als Linearkombination von b_1 und b_2? **(3)**

$x(t) = \quad \alpha e^{5t} b_1 + \beta e^{-5t} b_2$

(d) Geben Sie von 0 verschiedene Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ an, so dass die Lösung des oben gegebenen Differentialgleichungssystems für $t > 0$ beschränkt bleibt. **(2)**

$x_1(0) = \quad 1$

$x_2(0) = \quad -2$

LÖSUNG:

(a) s.o.

(b) $\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)(-3+\lambda) - 16 = \lambda^2 - 25$, Nullstellen ± 5. $A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$, Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$A + 5E = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(c) $e^{tA}x(0) = \alpha e^{tA} b_1 + \beta e^{tA} b_2 = \alpha e^{5t} b_1 + \beta e^{-5t} b_2$

(d) Man muss $x(0)$ parallel zu b_2 wählen.

8. **Trennbare Differentialgleichung** **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ gibt es auf ganz $\mathbb{R}$ konstante Lösungen? **(2)**

$$x(0) \in \{ \quad -1, 1 \quad \}$$

(b) Bestimmen Sie für den Anfangswert $x(0) = 0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.
Hinweis: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(4)

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \sin t & \text{für } -\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq t, \end{cases}$$

(c) Ist die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = -1$ eindeutig bestimmt?

☐ Ja ☒ Nein

(2)

Lösung:

(a) Ist eine Lösung $x(t) = c$ konstant so folgt $\dot{x}(t) = 0$, also $\sqrt{1-x(t)^2} = 0$, somit $x(t) = x(0) = \pm 1$. Dies sind offenbar auch Lösungen.

(b) Trennung der Variablen führt auf das Integral

$$G(x) := \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = t - t_0$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $G(x) = \arcsin(x)$, definiert für $x \in]-1, 1[$

Einsetzen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert $G(0) = 0 = 0 - t_0$, also $t_0 = 0$. Auflösen von $G(x) = t$ für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ nach x liefert das Ergebnis $x(t) = \sin t$. Dieses kann nach links durch $x(t) = -1$ für $t \leq -\frac{\pi}{2}$ und nach rechts durch $x(t) = 1$ für $t \geq \frac{\pi}{2}$ stetig differenzierbar fortgesetzt werden.

(c) Nein, die Lösung ist nicht eindeutig. Neben $x(t) = -1$ ist z.B. auch $x(t-5)$ mit dem $x(t)$ aus (b) eine Lösung des Anfangswertproblems.
Das liegt daran, dass $\sqrt{1-x^2}$ bei $x = \pm 1$ nicht Lipschitzstetig ist.