................
Note

Name | Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

# Wiederholungsklausur
# Mathematik für Physiker 3
# (Analysis 2)

Prof. Dr. H. Spohn

12. Oktober 2011, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: ............. Reihe: ............. Platz: .............

## Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **70 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| $\sum$ | | |

I ................
Erstkorrektur

II ................
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

1. **Tangentialvektor und Krümmung** **(4 Punkte)**

Berechnen Sie den Einheitstangentialvektor $T$ und den Krümmungsradius $r$ der Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos 2t, t, \sin 2t)$, im Punkt $t = \pi/2$.

| | |
|---|---|
| $T =$ | $r =$ |

2. **Taylorformel** **(8 Punkte)**

Gegeben ist die unendlich oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $f(1,1) = 4$ und

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} (1+x)e^{x-y^2} \\ -2xy\, e^{x-y^2} \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Hessematrix von $f$ an der Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$H_f(x,y) =$

(b) Wie lautet die Taylorentwicklung von $(u,v) \mapsto f(1+u, 1+v)$ bis zur zweiten Ordnung an der Stelle $(u,v) = (0,0)$ als Polynom in $u$ und $v$?

$f(1+u, 1+v) =$ $\qquad + \mathcal{O}(\| \binom{u}{v} \|^3)$

3. **Globale Maxima und Minima** **(17 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 6)(x + y) + 2.$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $f$ und entscheiden Sie, ob diese isolierte Maxima oder Minima sind.
HINWEIS: Betrachten Sie zunächst die Differenz der beiden sich ergebenden Gleichungen.

(b) Sei nun $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 6\} \subset \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass $\max f(B) = f(-1, -1)$.

4. **Implizit definierte Funktionen** **(9 Punkte)**

Gegeben sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin x + y + z &= 0, \\ 2x - 2\tan y - \sinh z &= 0. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass man dieses Gleichungssystem im Ursprung lokal gleichzeitig nach $y$ und $z$ auflösen kann und berechnen Sie die erste Ableitung der so implizit definierten Funktion $x \mapsto g(x)$ im Punkt $x = 0$.

(b) Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems werde im Ursprung lokal als Kurve im $\mathbb{R}^3$ durch $x$ parametrisiert. Geben Sie mit Hilfe von (a) den Einheitstangentialvektor an diese Kurve im Ursprung an.

5. **Koordinatentransformationen** **(8 Punkte)**

Sei $U = \mathbb{R} \times \left]-\pi, \pi\right[$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times \{0\})$ und $\Phi : U \to V$ die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} e^{u_1} \cos u_2 \\ e^{u_1} \sin u_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $D\Phi(u)$, das normierte lokale Zweibein $e_{u_1}(u), e_{u_2}(u)$ und $D\Phi^{-1}(\Phi(u))$.

$D\Phi(u) =$

$e_{u_1}(u) =$

$D\Phi^{-1}(\Phi(u)) =$

$e_{u_2}(u) =$

(b) Sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}$. Drücken Sie den Gradienten von $\tilde{f}$ durch Ableitungen von $f$ in der Basis $e_{u_1}, e_{u_2}$ aus.

$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} \tilde{f} =$

6. **Vektorfelder** **(6 Punkte)**

Beweisen Sie für die Vektorfelder $v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeweils stetig partiell differenzierbar, wie in den Übungen, die Identität

$$\nabla \cdot (v \times w) = w \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times w).$$

7. **Differentialgleichungssystem** **(10 Punkte)**

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t)\,.$$

(a) Das System ist linear, $\dot{x} = A\,x$ mit einer $2 \times 2$-Matrix $A$ und der vektorwertigen Funktion $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Wie lautet $A$?

| |
|---|
| A= |

(b) Geben Sie die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenvektoren von $A$ an.

| | |
|---|---|
| $\lambda_1 =$ | $b_1 =$ |
| $\lambda_2 =$ | $b_2 =$ |

(c) Sei die Anfangsbedingung $x(0) = \alpha b_1 + \beta b_2$ mit den in (b) bestimmten Eigenvektoren gegeben. Wie lautet die Lösung $x(t)$ als Linearkombination von $b_1$ und $b_2$?

| |
|---|
| $x(t) =$ |

(d) Geben Sie von 0 verschiedene Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ an, so dass die Lösung des oben gegebenen Differentialgleichungssystems für $t > 0$ beschränkt bleibt.

| | |
|---|---|
| $x_1(0) =$ | $x_2(0) =$ |

8. **Trennbare Differentialgleichung** **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ gibt es auf ganz $\mathbb{R}$ konstante Lösungen?

$$x(0) \in \Big\{ \qquad\qquad\qquad \Big\}$$

(b) Bestimmen Sie für den Anfangswert $x(0) = 0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.
HINWEIS: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$x(t) =$$

(c) Ist die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = -1$ eindeutig bestimmt?

☐ Ja ☐ Nein