TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. H. SPOHN
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2011
Probeklausur (Lösungen)
(27.06.2011)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2011S

Aufgaben

1. Krümmung einer Raumkurve [5 Punkte]

Parametrisieren Sie die Raumkurve $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^t(\cos t, \sin t, \sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R}$, auf Bogenlänge, bezeichnet mit $\tilde{\gamma}(s)$, und berechnen Sie dafür die Krümmung $\kappa(s)$.

$\tilde{\gamma}(s) = \frac{s}{2}\begin{pmatrix}\cos\ln s\\ \sin\ln s\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ **[3]**	$\kappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{2s}$ **[2]**

LÖSUNG:

$\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{1}{2}e^t\left\|\begin{pmatrix}\cos t - \sin t\\ \sin t + \cos t\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 2} = e^t$. Also ist z.B. $\tilde{s}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \|\dot{\gamma}(t')\|dt' = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{t'}dt' = e^t$. Mit $\tilde{t}(s) = \ln s$ ist also $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tilde{t}$ auf Bogenlänge parametrisiert, $s > 0$. $T(s) = \dot{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\ln s - \sin\ln s\\ \sin\ln s + \cos\ln s\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ und

$$\kappa(s) = \|\dot{T}(s)\| = \frac{1}{2s}\left\|\begin{pmatrix}-\sin\ln s - \cos\ln s\\ \cos\ln s - \sin\ln s\\ 0\end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{2s}.$$

2. Differenzierbarkeit [8 Punkte]

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq 0$ und $f(0,0) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist und berechnen Sie $\partial_1 f(0)$, $\partial_2 f(0)$.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$ von f im Ursprung in Richtung des Vektors $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, wobei

$$\partial_v f(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.

LÖSUNG:

(a) In $(x,y) \neq 0$ ist f stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen. Außerdem ist $|f(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$ also ist f Lipschitz-stetig und damit stetig im Ursprung. Wegen $f(x,0) = 0$ und $f(0,y) = 0$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\partial_x f(0) = \partial_y f(0) = 0$. **[3]**

(b) Die Richtungsableitung von f im Ursprung in Richtung v ist

$$\partial_v f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^3 v_1^2 v_2}{tt^2(v_1^2 + v_2^2)} - 0 \right) = f(v).$$

[2]

(c) Gemäß Definition aus der Vorlesung ist f total differenzierbar im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, falls eine lineare Abbildung $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ existiert, so dass

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) - f(x_0, y_0) - A(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

[1]

Außerdem ist die Matrix A eindeutig bestimmt und gleich der Jacobi-Matrix $Df(x_0, y_0)$ an der Stelle (x_0, y_0). **[1]**

Nach Aufgabenteil (a) gilt im Ursprung $(x_0, y_0) = (0, 0)$, dass $Df(0, 0) = (\partial_x f(0, 0), \partial_y f(0, 0)) = (0, 0)$. Wählen wir nun $(h_1, h_2) = (h, h) \neq 0$, so lautet obiger Differenzenquotient im Ursprung

$$\frac{f(h, h) - f(0, 0) - Df(0, 0)(h, h)}{\|(h, h)\|} = 2^{-3/2} \frac{h}{|h|}.$$

Daraus folgt, dass der Differenzenquotient im Limes $h \to 0$ gegen $\pm 2^{-3/2}$ und nicht gegen 0 strebt, was im Widerspruch steht zur Definition der totalen Differenzierbarkeit. **[1]**

3. Vektoranalysis **[4 Punkte]**

(a) Seien $F \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Welche Aussagen sind richtig?

☒ $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$, ☒ $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$, ☐ $\operatorname{grad}\operatorname{div} F = 0$, ☐ $\operatorname{grad}\operatorname{rot} F = 0$

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2, y^2, -z^2)$. Wie lautet $\nabla(\nabla\cdot F) - \Delta F$?

☒ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

LÖSUNG:

(a) Genau die ersten beiden Aussagen sind richtig. Dies wurde in den Übungen gezeigt. Die dritte Aussage ist falsch: Wir betrachten dazu z.B. $F(x, y, z) = (x^2/2, 0, 0)$ mit $\operatorname{grad}\operatorname{div} F(x, y, z) = (1, 0, 0) \neq 0$. Die linke Seite der vierten Aussage ist nicht definiert. **[2]**

(b) Wir berechnen direkt, oder benutzen die Formel aus den Übungen,

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F.$$

Da $\nabla \wedge F = 0$, folgt als Ergebnis der Nullvektor. **[2]**

4. Taylor-Formel **(8 Punkte)**

Gegeben sei eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, die im Ursprung einen kritischen Punkt mit der Hessematrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ besitzt. Weiter gilt

$$g(0) = 2, \quad \partial_1^3 g(0) = \partial_1^2 \partial_2 g(0) = 1, \quad \partial_1 \partial_2^2 g(0) = \partial_2^3 g(0) = 0.$$

(a) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung von g im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?

$$g(x,y) = 2 + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y \qquad +\mathcal{O}(\|(x,y)\|^4)$$

(b) Sei nun $f(x,y) = (-y, x+y)$. Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von $h = g \circ f$ im Entwicklungspunkt 0 explizit?

$$h(x,y) = 2 - \frac{1}{2}y^2 - yx \qquad +\mathcal{O}(\|(x,y)\|^3)$$

Lösung:

(a) Am stationären Punkt sind die ersten Ableitungen gleich 0. Mit der Taylorformel gilt $g(x,y) = g(0) + \frac{1}{2}\partial_1^2 g(0)x^2 + \partial_1\partial_2 g(0)xy + \frac{1}{2}\partial_2^2 g(0)y^2 + \frac{1}{6}\partial_1^3 g(0) + \frac{1}{2}\partial_1^2\partial_2 g(0) + \frac{1}{2}\partial_1\partial_2^2 g(0) + \frac{1}{6}\partial_2^3 g(0) + \mathcal{O}(\|(x,y)\|^4)$. **[jeder Term 1, also 5]**

(b) Es ist $h(x,y) = g(f(x,y)) = g(-y, x+y) = 5 + \frac{1}{2}y^2 - y(x+y) + \mathcal{O}(\|(x,y)\|^3)$. **[jeder Term 1, also 3]**

5. Extrema **[8 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := x^3 + y^3 + x^2 + y^2,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (0,0), \quad x_2 = (0, 2/3), \quad x_3 = (-2/3, 0), \quad x_4 = (-1, 0), \quad x_5 = (-2/3, -2/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in

☒ x_1 ☐ x_2 ☒ x_3 ☐ x_4 ☒ x_5

(b) f besitzt eine lokales Maximum in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☒ x_5

(c) f besitzt eine lokales Minimum in

☒ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(d) f besitzt einen Sattelpunkt in

☐ x_1 ☐ x_2 ☒ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

Lösung:

(a) Um die kritischen Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen des Gradienten von f,

$$\nabla f(x,y) = (x(3x+2), y(3y+2)) = (0,0),$$

woraus folgt, dass x_1, x_3 und x_5 kritische Punkte sind. x_2 und x_4 sind keine kritischen Punkte.

[2]

(b) Wir berechnen die Hesse-Matrix,

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+2 & 0 \\ 0 & 6y+2 \end{bmatrix}.$$

An den kritischen Punkten x_1, x_3 und x_5 erhalten wir,

$$H_f(x_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_f(x_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_f(x_5) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$H_f(x_1)$ hat den doppelten Eigenwert 2, $H_f(x_3)$ die Eigenwerte -2 und 2 und $H_f(x_5)$ den doppelten Eigenwert -2. Also hat f in x_5 ein lokales Maximum. **[2]**

(c) f hat in x_1 ein lokales Minimum, da $H_f(x_1)$ den doppelten Eigenwert $2 > 0$ hat. **[2]**

(d) f hat in x_3 einen Sattelpunkt, da $H_f(x_3)$ die Eigenwerte $-2 < 0$ und $2 > 0$ hat. **[2]**

6. Koordinatentransformationen **[10 Punkte]**

Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times \{0\})$ und $\Phi : U \to V$ die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \xi_2^2 \\ 2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $D\Phi(\xi)$, das normierte lokale Zweibein $e_{\xi_1}(\xi), e_{\xi_2}(\xi)$ und $D\Phi^{-1}(\Phi(\xi))$.

$$D\Phi(\xi) = 2\begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \quad \textbf{[2]}$$

$$e_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \textbf{[1]}$$

$$D\Phi^{-1}(\Phi(\xi)) = D\Phi(\xi)^{-1} = \frac{1}{2(\xi_1^2+\xi_2^2)} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \textbf{[2]}$$

$$e_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \textbf{[1]}$$

(b) Sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}$. Drücken Sie den Gradienten von $\tilde{f}$ durch Ableitungen von f in der Basis e_{ξ_1}, e_{ξ_2} aus.

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} \tilde{f} = D\Phi(\xi)^{T^{-1}} \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \end{pmatrix} f = \frac{1}{2\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} (e_{\xi_1}\partial_{\xi_1} + e_{\xi_2}\partial_{\xi_2}) f \quad \textbf{[4]}$$

LÖSUNG:

(a) s.o.

(b) Laut Vorlesung ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} \tilde{f} &= D\Phi(\xi)^{T^{-1}} \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \end{pmatrix} f = \frac{1}{2(\xi_1^2+\xi_2^2)} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \end{pmatrix} f \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} (e_{\xi_1}\partial_{\xi_1} + e_{\xi_2}\partial_{\xi_2}) f \end{aligned}$$

7. Implizite Funktionen **[7 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := x^2 + yz + z^2 - \mathrm{e}^z.$$

(a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes $(1,0,0)$ eine Funktion $g(x,y)$ existiert, die die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach $z = g(x,y)$ auflöst.

(b) Wie lautet der Gradient von g im Punkt $(1,0)$?

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

LÖSUNG:

(a) Beh In einer Umgebung des Punktes $(1,0,0)$ existiert eine Funktion $g(x,y)$, die die Gleichung $f(x,y,z)=0$ nach $z=g(x,y)$ auflöst.

Bew Der Satz über implizite Funktionen aus der Vorlesung würde eine solche Auflösung liefern, falls seine Voraussetzungen erfüllt wären. Wir verifizieren also die Anwendbarkeit dieses Satzes (die 3 Voraussetzungen aus der Vorlesung).

(1) Die Funktion ist stetig differenzierbar, $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, da Polynome und die Exponentialfunktion glatt sind. **[1]**

(2) Die Funktion verschwindet im Punkt $(1,0,0)$, d.h. $f(1,0,0)=0$. **[1]**

(3) Die Ableitung nach der aufzulösenden Variablen ist am Punkt $(1,0,0)$ ungleich Null,

$$\partial_z f(x,y,z) = y + 2z - \mathrm{e}^z, \qquad \partial_z f(1,0,0) = -1.$$

[2]

Der Satz über implizite Funktionen liefert nun die Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion g mit $g(1,0)=0$ und $f(x,y,g(x,y))=0$ in einer Umgebung von $(x,y)=(1,0)$. **[1]**

(b) Beh $\nabla g(1,0) = (2,0)$

Bew Gemäß der Formel aus der Vorlesung berechnet sich der Gradient von g folgendermassen

$$\nabla g(1,0)^T = -\left(\partial_z f(1,0,0)\right)^{-1} \begin{pmatrix} \partial_x f(1,0,0) & \partial_y f(1,0,0) \end{pmatrix}.$$

Da $\partial_x f(x,y,z) = 2x$ und $\partial_y f(x,y,z) = z$, folgt die Behauptung. **[2]**