TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. H. Spohn
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2011
Probeklausur
(27.06.2011)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2011S

Aufgaben

1. Krümmung einer Raumkurve [5 Punkte]

Parametrisieren Sie die Raumkurve $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^t(\cos t, \sin t, \sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R}$, auf Bogenlänge, bezeichnet mit $\tilde{\gamma}(s)$, und berechnen Sie dafür die Krümmung $\kappa(s)$.

$\tilde{\gamma}(s) =$	$\kappa(s) =$

2. Differenzierbarkeit [6 Punkte]

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq 0$ und $f(0,0) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist und berechnen Sie $\partial_1 f(0)$, $\partial_2 f(0)$.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$ von f im Ursprung in Richtung des Vektors $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, wobei

$$\partial_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.

3. Vektoranalysis [4 Punkte]

(a) Seien $F \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Welche Aussagen sind richtig?

☐ $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$, ☐ $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$, ☐ $\operatorname{grad}\operatorname{div} F = 0$, ☐ $\operatorname{grad}\operatorname{rot} F = 0$

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2, y^2, -z^2)$. Wie lautet $\nabla(\nabla\cdot F) - \Delta F$?

☐ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

4. Taylor-Formel (8 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, die im Ursprung einen kritischen Punkt mit der Hessematrix $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ besitzt. Weiter gilt

$$g(0) = 2, \quad \partial_1^3 g(0) = \partial_1^2\partial_2 g(0) = 1, \quad \partial_1\partial_2^2 g(0) = \partial_2^3 g(0) = 0.$$

(a) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung von g im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?

$g(x,y) = \qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(\|(x,y)\|^4)$

(b) Sei nun $f(x,y) = (-y, x+y)$. Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von $h = g \circ f$ im Entwicklungspunkt 0 explizit?

$h(x,y) = \qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(\|(x,y)\|^3)$

5. Extrema **[8 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := x^3 + y^3 + x^2 + y^2,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (0,0), \quad x_2 = (0, 2/3), \quad x_3 = (-2/3, 0), \quad x_4 = (-1,0), \quad x_5 = (-2/3, -2/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(b) f besitzt eine lokales Maximum in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(c) f besitzt eine lokales Minimum in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(d) f besitzt einen Sattelpunkt in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

6. Koordinatentransformationen **[10 Punkte]**

Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times \{0\})$ und $\Phi : U \to V$ die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \xi_2^2 \\ 2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $D\Phi(\xi)$, das normierte lokale Zweibein $e_{\xi_1}(\xi), e_{\xi_2}(\xi)$ und $D\Phi^{-1}(\Phi(\xi))$.

$D\Phi(\xi) =$	$e_1(\xi) =$
$D\Phi^{-1}(\Phi(\xi)) =$	$e_2(\xi) =$

(b) Sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}$. Drücken Sie den Gradienten von $\tilde{f}$ durch Ableitungen von f in der Basis e_{ξ_1}, e_{ξ_2} aus.

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} \tilde{f} =$$

7. Implizite Funktionen **[7 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := x^2 + yz + z^2 - e^z.$$

(a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes $(1,0,0)$ eine Funktion $g(x,y)$ existiert, die die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach $z = g(x,y)$ auflöst.

(b) Wie lautet der Gradient von g im Punkt $(1,0)$?

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$