....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Prof. Dr. H. Spohn

17. August 2011, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **65 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Parametrisierung auf Bogenlänge** **(4 Punkte)**
Geben Sie explizit eine Parametrisierung auf Bogenlänge, $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, der Kettenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, an.

$$\boxed{\tilde{\gamma}(s) = (\operatorname{arsinh}(s), \sqrt{1 + s^2})}$$

LÖSUNG:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2 t'} dt' = \int_0^t \cosh t' dt' = \sinh t.$$

Mit der Umkehrfunktion $\tilde{t}(s) = \operatorname{arsinh}(s) = \sinh^{-1}(s)$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\tilde{t}(s)) &= (\operatorname{arsinh}(s), \cosh(\operatorname{arsinh}(s))) = (\operatorname{arsinh}(s), \sqrt{1 + \sinh(\operatorname{arsinh}(s))^2}) \\ &= (\operatorname{arsinh}(s), \sqrt{1 + s^2}).\end{aligned}$$

2. **Kettenregel** **(6 Punkte)**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei total differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y, z) = -y + f(x^2 + y^2, ze^{-x})$$

auf $\mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} + yz\frac{\partial g}{\partial z} = x$$

erfüllt.

Lösung:

g ist Kombination von differenzierbaren Funktionen. Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) &= \partial_1 f(x^2 + y^2, z\,e^{-x})2x - \partial_2 f(x^2 + y^2, z\,e^{-x})z\,e^{-x},\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) &= -1 + \partial_1 f(x^2 + y^2, z\,e^{-x})2y,\\
\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) &= \partial_2 f(x^2 + y^2, z\,e^{-x})e^{-x}.
\end{aligned}$$

Wir lassen die Argumente von f und seinen Ableitungen weg, da sie immer gleich sind:

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} + yz\frac{\partial g}{\partial z} = 2xy\partial_1 f - yz\,e^{-x}\partial_2 f + x - 2xy\partial_1 f + yz\,e^{-x}\partial_2 f = x.$$

3. **Taylorformel** **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{1-(xy)^2}$.

(a) Geben Sie die Taylorentwicklung von f im Nullpunkt mindestens bis zur fünften Ordnung an. Hinweis: Geometrische Reihe **(4)**

$$f(x, y) = \quad x + x^3y^2 + x^5y^4 + \cdots = x + x^3y^2 + \mathcal{O}(|(x, y)|^9)$$

(b) Wie lautet $\partial_x^3 \partial_y^2 f(0, 0)$? **(2)**

☐ -12 ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{12}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{12}$ ☐ 1 ☒ 12

(c) Wie lautet $\partial_x^2 \partial_y^3 f(0, 0)$? **(2)**

☐ -12 ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{12}$ ☒ 0 ☐ $\frac{1}{12}$ ☐ 1 ☐ 12

Lösung:

(a) Mit $z = (xy)^2$ und $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$ für $|z| < 1$ ist

$$f(x, y) = x \frac{1}{1-(xy)^2} = x(1 + x^2y^2 + x^4y^4 + \cdots) = x + x^3y^2 + \cdots .$$

4. **Implizit definierte Funktionen** **(8 Punkte)**
Sei $f(x,y) = 3y^5 - 5xy^3 + 10x^4$ für $x, y > 0$.

(a) In welchem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ist $f(x,y) = 0$ **nicht** explizit nach y auflösbar, d.h. es gibt keine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$, mit offenen Intervallen U, V, die x_0, bzw., y_0 enthalten, so dass $f(x, g(x)) = 0$ für $x \in U$? **[4]**

$$\boxed{(x_0, y_0) = (\tfrac{1}{\sqrt[3]{25}}, \tfrac{1}{\sqrt[3]{5}})}$$

(b) In welchem Punkt $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gilt für die implizit durch $f(x,y) = 0$ definierte Auflösung nach y, $y = g(x)$, dass $g'(x_1) = 0$. **[4]**

$$\boxed{(x_1, y_1) = (\tfrac{5}{16}, \tfrac{5}{8})}$$

Lösung:

(a) $\partial_y f(x,y) = 15y^4 - 15xy^2$. Ist $\partial_y f(x,y) = 0$, so ist f nicht lokal nach y auflösbar. Dies ist erfüllt für $x_0 = y_0^2$. Weiter muss $0 = f(x_0, y_0) = f(y_0^2, y_0) = 3y_0^5 - 5y_0^5 + 10y_0^8 = y_0^5(10y_0^3 - 2)$ gelten, d.i. $y_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. Also ist $f(x,y) = 0$ im Punkt $(\frac{1}{\sqrt[3]{25}}, \frac{1}{\sqrt[3]{5}})$ nicht lokal nach y auflösbar.

(b) Ist g eine lokale Auflösung von $f(x,y) = 0$ nach y mit $g(x_0) = y_0$, so gilt

$$g'(x_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)}$$

Aus $g'(x) = 0$ folgt also $0 = \partial_x f(x,y) = -5y^3 + 40x^3$. Wegen $x, y > 0$ also $x = \frac{1}{2}y$. Es muss $0 = f(x,y) = f(\frac{1}{2}y, y) = 3y^5 - \frac{5}{2}y^4 + \frac{5}{8}y^4$ gelten, woraus $y = \frac{5}{8}$ folgt. Im Punkt $(\frac{5}{16}, \frac{5}{8})$ ist also $g'(\frac{5}{16}) = 0$.

5. **Extrema mit Nebenbedingungen** **(14 Punkte)**

Sei $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $g'(t) > 0$ für $t \geq 0$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = g(\|x\|)$. Finden Sie die globalen Maxima und Minima von h unter der Nebenbedingung $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 5$.

LÖSUNG:

Die Nebenbedingung kann geschrieben werden als $f(x) = 0$ mit $f(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - c$. **(1)**

Es gilt $\operatorname{grad} f(x) = \binom{10x_1+4x_2}{4x_1+4x_2} \neq 0$ für $(x_1, x_2) \neq 0$. Insbesondere ist $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ falls $f(x) = 0$. **(2)**

Für einen Extremwert x von h unter der Nebenbedingung $f(x) = 0$ gilt **(2)**

$$\operatorname{grad} h(x) = \lambda \operatorname{grad} f(x)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\operatorname{grad} h(x) = g'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} \neq 0$ für $x \neq 0$, ist dass gleichbedeutend mit

$$\operatorname{grad} f(x) = \mu x,$$

wobei $\mu = \frac{g'(\|x\|)}{\lambda\|x\|}$. Eingesetzt ergibt das die Eigenwertgleichung **(2)**

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} x = \mu\, x$$

mit den Lösungen (i) $\mu = 2$, $x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und (ii) $\mu = 12$, $x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **(2)**

Dies sind die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der Matrix.
Damit die Nebenbedingung erfüllt ist muss also gelten

(i) $0 = f(\alpha, -2\alpha) = 5\alpha^2 - 8\alpha^2 + 8\alpha^2 - 5 = 5\alpha^2 - 5$, also $\alpha = \pm 1$ oder

(ii) $0 = f(2\alpha, \alpha) = 20\alpha^2 + 8\alpha^2 + 2\alpha^2 - 5 = 30\alpha^2 - 5$, also $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen sind also $x^{(1)} = (1, -2)$, $x^{(2)} = -x^{(1)}$ und $x^{(3)} = \sqrt{6}(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $x^{(4)} = -x^{(3)}$. **(2)**

Wegen $\|x^{(1)}\| = \|x^{(2)}\| = \sqrt{5} > \sqrt{\frac{5}{6}} = \|x^{(3)}\| = \|x^{(4)}\|$ ist $h(x^{(1)}) = h(x^{(2)}) > h(x^{(3)}) = h(x^{(4)})$. **(1)**

Da die durch $f(x) = 0$ gegebene Menge beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt h Maximum und Minimum darauf an. **(1)**

Somit liegen bei $x^{(1,2)}$ die beiden absoluten Maxima und bei $x^{(3,4)}$ die beiden absoluten Minima. **(1)**

6. **Vektorfelder** **(8 Punkte)**

(a) Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeweils stetig partiell differenzierbar, dass

$$\nabla \times (fv) = \nabla f \times v + f\,\nabla \times v.$$

(b) Berechnen Sie $\nabla \times w(x)$ für $x \neq 0$ mit $w(x_1, x_2, x_3) = \|x\| \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

(a) $w = fv$ ist das Vektorfeld mit den Komponenten $w(x) = \begin{pmatrix} f(x)v_1(x) \\ f(x)v_2(x) \\ f(x)v_3(x) \end{pmatrix}$. Mit der Produktregel ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} fv = \operatorname{rot} w &= \begin{pmatrix} \partial_2 w_3 - \partial_3 w_2 \\ \partial_3 w_1 - \partial_1 w_3 \\ \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_2 f)v_3 + f\partial_2 v_3 - (\partial_3 f)v_2 - f\partial_3 v_2 \\ (\partial_3 f)v_1 + f\partial_3 v_1 - (\partial_1 f)v_3 - f\partial_1 v_3 \\ (\partial_1 f)v_2 + f\partial_1 v_2 - (\partial_2 f)v_1 - f\partial_2 v_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\partial_2 f)v_3 - (\partial_3 f)v_2 \\ (\partial_3 f)v_1 - (\partial_1 f)v_3 \\ (\partial_1 f)v_2 - (\partial_2 f)v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f\partial_2 v_3 - f\partial_3 v_2 \\ f\partial_3 v_1 - f\partial_1 v_3 \\ f\partial_1 v_2 - f\partial_2 v_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + f \operatorname{rot} v = \operatorname{grad} f \times v + f \operatorname{rot} v.
\end{aligned}$$

(4)

(b) Es ist $\operatorname{grad} \|x\| = \frac{x}{\|x\|}$ und $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\operatorname{rot} w(x) = \operatorname{grad} f(x) \times \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)x_3 \\ x_3(x_2 - x_1) \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} = \frac{x_2 - x_1}{\|x\|} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

(4)

7. **Differentialgleichungssystem** **(10 Punkte)**
Gegeben ist das Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t)\,.$$

(a) Das System ist linear, $\dot{x} = A\,x$ mit einer 2×2-Matrix A und der vektorwertigen Funktion $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Wie lautet A? **(2)**

A= $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) Welche Dimension hat der Lösungsraum von $\dot{x} = Ax$? **(2)**

☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(c) Wie lautet das Matrixexponential von A? **(4)**

$e^{At} = \quad e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems **(2)**

$$\dot{x} = A\,x\,,\ x(0) = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

$x(t) = \quad e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

LÖSUNG:

(a) s.o.

(b) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Der Lösungsraum ist also zweidimensional.

(c) $A = -1E + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die beiden Summanden kommutieren, der zweite Summand ist nilpotent, somit ist $e^{At} = e^{-tE}(E + t\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) s.o.

8. **Trennbare Differentialgleichung** **(7 Punkte)**

Gegeben ist das Anfangswertproblem (AWP) $\dot{x} = 1 + |x|$, $x(0) = 0$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine Lösung dieses AWPs auf ganz $\mathbb{R}$. **(4)**

$$\boxed{x(t) = \begin{cases} e^t - 1 & \text{für } t \geq 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{für } t < 0 \end{cases}}$$

(b) Ist diese Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort. **(3)**

LÖSUNG:

(a) Trennung der Variablen liefert

$$G(x) := \int \frac{1}{1+|x|} dx = t - t_0$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+|x|}$ ist $G(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{für } x \geq 0, \\ -\ln(1-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$.

Einsetzen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert $G(0) = 0 = 0 - t_0$, also $t_0 = 0$. Auflösen von $G(x) = t$ nach x liefert das Ergebnis.

(b) Die Lösung ist eindeutig, da die Funktion $x \mapsto 1 + |x|$ lokal (sogar global) Lipschitzstetig ist (mit Lipschitzkonstante 1).