....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Prof. Dr. H. Spohn

17. August 2011, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **65 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Parametrisierung auf Bogenlänge** **(4 Punkte)**
Geben Sie explizit eine Parametrisierung auf Bogenlänge, $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, der Kettenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, an.

$\tilde{\gamma}(s) =$

2. **Kettenregel** **(6 Punkte)**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei total differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y, z) = -y + f(x^2 + y^2, ze^{-x})$$

auf $\mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y} + yz\frac{\partial g}{\partial z} = x$$

erfüllt.

3. **Taylorformel** **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{1-(xy)^2}$.

(a) Geben Sie die Taylorentwicklung von f im Nullpunkt mindestens bis zur fünften Ordnung an.
HINWEIS: Geometrische Reihe

$f(x, y) =$

(b) Wie lautet $\partial_x^3 \partial_y^2 f(0, 0)$?

☐ -12 ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{12}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{12}$ ☐ 1 ☐ 12

(c) Wie lautet $\partial_x^2 \partial_y^3 f(0, 0)$?

☐ -12 ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{12}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{12}$ ☐ 1 ☐ 12

4. **Implizit definierte Funktionen** **(8 Punkte)**

Sei $f(x,y) = 3y^5 - 5xy^3 + 10x^4$ für $x, y > 0$.

(a) In welchem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ist $f(x,y) = 0$ **nicht** explizit nach y auflösbar, d.h. es gibt keine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$, mit offenen Intervallen U, V, die x_0, bzw., y_0 enthalten, so dass $f(x, g(x)) = 0$ für $x \in U$?

$(x_0, y_0) =$

(b) In welchem Punkt $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gilt für die implizit durch $f(x,y) = 0$ definierte Auflösung nach y, $y = g(x)$, dass $g'(x_1) = 0$.

$(x_1, y_1) =$

5. **Extrema mit Nebenbedingungen** **(14 Punkte)**

Sei $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $g'(t) > 0$ für $t \geq 0$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = g(\|x\|)$. Finden Sie die globalen Maxima und Minima von h unter der Nebenbedingung $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 5$.

6. **Vektorfelder** **(8 Punkte)**

(a) Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeweils stetig partiell differenzierbar, dass

$$\nabla \times (fv) = \nabla f \times v + f \, \nabla \times v.$$

(b) Berechnen Sie $\nabla \times w(x)$ für $x \neq 0$ mit $w(x_1, x_2, x_3) = \|x\| \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

7. **Differentialgleichungssystem** **(10 Punkte)**

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t)\,.$$

(a) Das System ist linear, $\dot{x} = A\,x$ mit einer 2×2-Matrix A und der vektorwertigen Funktion $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Wie lautet A?

A=

(b) Welche Dimension hat der Lösungsraum von $\dot{x} = Ax$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(c) Wie lautet das Matrixexponential von A?

$e^{At} =$

(d) Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = A\,x\,,\ x(0) = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

$x(t) =$

8. **Trennbare Differentialgleichung** **(7 Punkte)**

Gegeben ist das Anfangswertproblem (AWP) $\dot{x} = 1 + |x|$, $x(0) = 0$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine Lösung dieses AWPs auf ganz $\mathbb{R}$.

$x(t) =$

(b) Ist diese Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.