Prof. Dr. H. Spohn

Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2011

Blatt 13

(18.07.2011)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2011S

Zentralübung

176. Zeitabhängiges lineares Differentialgleichungssystem

Seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ und $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ stetig. Das zeitgeordnete Exponential von A, $\mathcal{T}e^{\int_s^t dsA(s)}$, ist definiert durch die Reihe

$$\mathcal{T}e^{\int_s^t duA(u)} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{n-1}} ds_n A(s_1) \cdots A(s_n),$$

(a) Man bestätige $\int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{n-1}} ds_n = \frac{(t-s)^n}{n!}$

(b) $\mathcal{T}e^{\int_s^t duA(u)}$ ist absolut konvergent als matrixwertige Funktionenreihe auf $[s,t]$.

(c) $\mathcal{T}e^{\int_s^t duA(u)} = e^{B(t-s)}$ falls $A(u) = B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für alle $u \in [s,t]$.

(d) Zeigen Sie, dass das zeitgeordnete Exponential folgende Differentialgleichung erfüllt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{T}\mathrm{e}^{\int_s^t \mathrm{d}u\, A(u)} = A(t)\, \mathcal{T}\mathrm{e}^{\int_s^t \mathrm{d}u\, A(u)}.$$

(e) Zeigen Sie, dass

$$x(t) = \left(\mathcal{T}\mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}u\, A(u)}\right) x_0 + \int_0^t \mathrm{d}s\, \left(\mathcal{T}\mathrm{e}^{\int_s^t \mathrm{d}u\, A(u)}\right) c(s)$$

eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + c(t), \quad x(0) = x_0.$$

177. Trennung der Variablen

(a) Lösen Sie das Anfagswertproblem

$$\dot{x} = -\mathrm{e}^{-x} \sin t, \quad x(t_0) = x_0.$$

Für welche Paare (t_0, x_0) existieren globale Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(b) Geben Sie eine Funktion $V(x,t)$ an, auf deren Niveaulinien die Lösungen verlaufen.

(c) Skizzieren Sie die Trajektorien.

178. Potenzreihenansatz

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung N-ter Ordnung

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(t)\, x^{(n)}(t) = b(t),$$

wobei $a_n, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die folgenden, in einer Umgebung des Ursprungs absolut konvergenten Potenzreihen gegeben sind,

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}\, t^k, \quad b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, t^k.$$

(a) Nehmen Sie an, dass eine Lösung $x(t)$ zu den Anfangsbedingungen $x^{(m)}(0) = x_m$ mit $m = 0, ..., N-1$ existiert, die um den Nullpunkt eine Potenzreihendarstellung mit positivem Konvergenzradius besitzt,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, t^k.$$

Leiten Sie Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten c_k her.

(b) Benutzen Sie einen Potenzreihenansatz, um die folgende DGL zu lösen,

$$\dot{x}(t) = t\, x(t), \quad x(0) = 1.$$

Hausaufgaben

179. Laplace-Transformation

Gegeben sei das AWP

$$y''(t) + \omega_0^2\, y(t) = p\cos(\omega t), \qquad y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0,$$

wobei $\omega_0, \omega > 0$, $\omega_0 \neq \omega$ und $p \in \mathbb{R}$.

(a) Es bezeichne $Y := \mathcal{L}(y)$ die Laplace-Transformierte der Lösung y. Wie lautet Y?

(b) Bestimmen Sie für $p = 0$ die Lösung $y(t)$.

(c) Sei nun $p \neq 0$. Bestimmen Sie für $y_0 = v_0 = 0$ die Lösung $y(t)$.

180. Separierbare Differentialgleichungen

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $y'x = 2y$ (b) $y' = \frac{2x}{x^2+1} y$ (c) $y' = -\frac{2x+4y+2}{4x+12y+8}$

181. Besselsche Differentialgleichung

(a) Benutzen Sie einen Potenzreihenansatz, um eine Funktion $J_0(x)$ zu konstruieren, die die Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

und die Bedingung $J_0(0) = 1$ erfüllt.

(b) Finden Sie für $x > 0$ einen möglichst expliziten Ausdruck für eine von J_0 linear unabhängige Lösung, in dem Sie die Methode der Reduktion der Ordnung aus der Vorlesung benutzen.

Abgabe der Hausaufgaben: 25.07.2011, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung