TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. H. Spohn
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2011
Blatt 12
(11.07.2011)
http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2011S

Zentralübung

169. Implizite Differentialgleichungen

Die C^1-Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definiert die implizite Differentialgleichung $F(x, \dot{x}, t) = 0$ für Kurven $x : I \to \mathbb{R}^n$.

(a) Unter welcher Bedingung kann das AWP $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ lokal in eine explizite Differentialgleichung umgewandelt werden?

(b) Sei nun zusätzlich $\partial_t F = 0$, $x_0 = 0$ und $g(x_0) = 0$. Wie lautet dann die Linearisierung dieser Differentialgleichung?

170. Eindeutigkeit der Lösung, Fundamentalsystem

Für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zeige man:

(a) das AWP mit $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$.
Hinweis: Betrachten Sie $y(t) = e^{-At}x(t)$.

(b) Seien $x_1(t), \dots, x_n(t)$ Lösungen von $\dot{x} = Ax$ und $(x_1(0), \dots, x_n(0))$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann ist
$$e^{At} = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) & \cdots & x_n(0) \end{pmatrix}^{-1}$$
und damit $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren von A jeweils zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist $e^{At} = B \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})B^{-1}$.

(d) Ist A symmetrisch und B schon eine ONB, so ist $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k b_k^T$ und $e^{At} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} b_k b_k^T$.

171. Rotation um eine Achse

Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $Ax = a \times x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ist
$$e^{At}x = \frac{a \cdot x}{\|a\|^2}a + \left(x - \frac{a \cdot x}{\|a\|^2}a\right)\cos\|a\|t + \frac{a \times x}{\|a\|}\sin\|a\|t.$$

172. Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Differentialgleichung $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$ besitzt zu jeder Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Vielfachheit k die k Lösungen $x_{\lambda,i}(t) = t^i e^{\lambda t}$, $i = 0, \dots, k-1$.

Hausaufgaben

173. Matrixexponentiale

Bestimmen Sie e^{At} für

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (f) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Hinweis: $e^{A+B} = e^A e^B$, falls $AB = BA$.

174. Gedämpfter harmonischer Oszillator

Diskutieren Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{q} = -q - 2\gamma\dot{q}$$

mit $q(t) \in \mathbb{R}$ als Kurven im Phasenraum $(q(t), \dot{q}(t))$ für die folgenden drei Bereiche der Dämpfungskonstante γ.

(a) $\gamma > 1$ (“*überdämpft*”)

(b) $\gamma = 1$ (“*kritisch gedämpft*”)

(c) $0 < \gamma < 1$ (“*schwach gedämpft*”)

Hinweis: Setzen Sie $x := (q, \dot{q})$ und lösen Sie das zugehörige System $\dot{x} = Ax$.

175. Gekoppelte Pendel

Das Potential für ein gekoppeltes Doppelpendel mit Auslenkung $q_1(t)$, $q_2(t)$ lautet

$$V(q_1, q_2) = \tfrac{1}{2}q_1^2 + \tfrac{1}{2}q_2^2 + \tfrac{\kappa}{2}(q_1 - q_2)^2$$

mit der Federkonstanten $\kappa \geq 0$.

(a) Schreiben Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen in der Form $\ddot{q}(t) = -Kq(t)$ mit $K \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Bestimmen Sie $\sqrt{K}$ und $\cos(\sqrt{K}\,t)$, $\sin(\sqrt{K}\,t)$ und damit das Fundamentalsystem des zugehörigen Systems erster Ordnung. Hinweis: Ist $K = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T$ mit einer ONB (u_1, u_2), so ist $f(K) := f(\lambda_1)u_1 u_1^T + f(\lambda_2)u_2 u_2^T$.

(c) Wie lauten die reinen Eigenschwingungen des Systems? Illustrieren Sie anhand eines physikalischen Systems.

Abgabe der Hausaufgaben: 18.07.2011, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung