TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. H. Spohn
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2011
Blatt 11
(04.07.2011)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2011S

Zentralübung

163. Extrema mit mehreren Nebenbedingungen

Seien $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n \in \mathbb{N}$, h, f in C^1. $M = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$. h habe auf M ein lokales Extremum an der Stelle a und $Df(a)$ habe vollen Rang. Dann gilt

$$\operatorname{grad} h(a) \in \operatorname{span}(\operatorname{grad} f_1(a), \dots, f_m(a)),$$

bzw., es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$, so dass, mit $F_\lambda = h - \langle \lambda, f \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{grad} F_\lambda(a) = 0.$$

164. Energieerhaltung bei der Variationsrechnung

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, die Lagrange-Funktion $f(x, v, t)$, $x, v \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_1]$, zum zu minimierenden Funktional $\mathcal{A}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), \dot{x}(t), t)dt$. Dann erfüllt jedes zweimal stetig differenzierbare Extremum von $\mathcal{A}$ mit den Endpunkten $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ die Euler-Lagrange Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v}\big(x(t), \dot{x}(t), t\big) - \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), \dot{x}(t), t\big) = 0. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass bei zeitlicher Translationsinvarianz von $\mathcal{A}$ (d.h. $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) die Energie

$$E(x, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x, v, t)v - f(x, v, t)$$

erhalten ist: Ist $\tilde{x}$ eine Lösung der Euler-Langrange-Gleichungen, so ist $t \mapsto E(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))$ eine konstante Funktion. Was passiert wenn $f(x, v, t)$ nur von t und x, bzw. nur von t und v abhängt?

(b) Wie lautet die Energiefunktion $E(x, v)$ für eine zeitunabhängige Lagrange-Funktion der klassischen Mechanik, $f(x, v, t) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - V(x)$, $x, v \in \mathbb{R}^n$?

165. Variationsrechnung mit Nebenbedingungen

Eine ideale Kette hängt im homogenen Schwerefeld $-ge_y$ zwischen den beiden Punkten $(\pm 1, 0)$. Die potentielle Energie der Kette soll bei gegebener Länge $L > 2$ minimiert werden. Zeigen Sie dazu mit Hilfe eines Lagrange Multiplikators, dass $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $h(\pm 1) = 0$ und $h'(x) = \sinh(ax)$ für geeignetes $a > 0$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist.

Hausaufgaben

166. Extrema mit Nebenbedingungen

Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

(a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, die vom Punkt $(1, 1, 1)$ den kleinsten bzw. größten Abstand haben.

(b) Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 5x+y-3z$, auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

167. Minimale Rotationsflächen

Führen Sie das Beispiel der minimalen Rotationsflächen aus der Vorlesung mit den Randbedingungen $x(-L) = 1$, $x(L) = 1$ aus. Zeigen Sie hierzu, dass für L klein genug die Rotationsfläche mit $x'(t) = \sinh(ct)$ und geeignetem $c > 0$ die Euler-Lagrange-Gleichung löst.

168. Brachistochrone (Kurve kürzester Laufzeit)

Ein Massenpunkt bewege sich entlang einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ mit Geschwindigkeit $v(\gamma(\theta)) > 0$. Dann ist die Zeit zum Durchlaufen der Kurve gegeben durch

$$T(\gamma) = \int_0^a \frac{\|\gamma'(\theta)\|}{v\big(\gamma(\theta)\big)}\, d\theta.$$

Im Schwerefeld der Erde ist für ein anfangs ruhendes Teilchen mit $\gamma(0) = (0, 0)$ die Geschwindigkeit gegeben durch $v(\gamma(\theta)) = \sqrt{-g\gamma_2(\theta)}$, mit der Erdbeschleunigung g, wobei $\gamma_2(\theta) \leq 0$ voraussgesetzt wird. Der Endpunkt sei $\gamma(a) = (b, c)$ mit $b > 0$, $c < 0$.

(a) Sei γ durch seine negative y-Komponente parametrisiert, $\gamma(\theta) = (f(\theta), -\theta)$, wobei $a = -c$ gesetzt ist. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für Kurven γ, die extremal bezüglich $T(\gamma)$ sind.

(b) Sei γ nun durch seine x-Komponente parametrisiert, $\gamma(\theta) = (\theta, g(\theta))$, wobei jetzt $a = b$ gewählt ist. Welche Differentialgleichung ergibt sich aus der Energieerhaltung (Aufgabe 164)?

(c) Zeigen Sie, dass eine Zykloide $\tilde{\gamma}(\phi) = r\binom{\phi-\sin\phi}{\cos\phi-1}$, für die es ein $\phi_1 \in [0, 2\pi]$ gibt, mit $\tilde{\gamma}(\phi_1) = \binom{b}{c}$ bei entsprechender Parametrisierung die Differentialgleichungen in (a) und (b) löst.

Abgabe der Hausaufgaben: 11.07.2011, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung