Prof. Dr. H. Spohn
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3 (Analysis 2)

Sommersemester 2011
Blatt 9
(20.06.2011)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2011S

Zentralübung

154. Metrischer Tensor

Für die Parametrisierung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ ist der metrische Tensor $g : U \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch $g := D\Phi^T D\Phi$. Hierbei ist $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $D\Phi$ habe auf U vollen Rang.

(a) Sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine glatte Kurve in U. Zeigen Sie, dass die Länge von $\tilde{\gamma} := \Phi \circ \gamma$ gegeben ist durch $L(\tilde{\gamma}) = \int_a^b \langle \dot{\gamma}(t), g(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\rangle^{1/2} dt$

(b) Sei nun G_f der Graph der glatten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Parametrisierung $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Berechnen Sie $g(x, y)$.

(c) Sei nun $f(x, y) = h(\sqrt{x^2 + y^2})$ mit der Parametrisierung $\Phi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, h(r))$ von G_f. Berechnen Sie $g(r, \phi)$.

(d) Wie lautet $g(r, \phi)$ für $h(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$, $r \in\ ]0, R[$? Berechnen Sie bezüglich g Radius und Umfang des Kreises $\{x^2 + y^2 = \rho^2; x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ mit $0 < \rho < R$.

155. Der Satz über implizite Funktionen, linearer Fall

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, $b \in \mathbb{R}^m$. Unter welcher Bedingung ist das Gleichungssystem $f(x, y) = b$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ nach y auflösbar? Man gebe explizit die implizit definierte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an, für die $f(x, g(x)) = b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

156. Thermodynamische Beziehungen

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Sei diese Gleichung für alle $j = 1, ..., n$ nach x_j auflösbar mit $\partial_j f(\bar{x}) \neq 0$. Interpretieren und beweisen Sie die Gleichung

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = (-1)^n.$$

Hausaufgaben

157. Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Die Koordinatentransformation $\Phi : \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times] - \pi, \pi[\to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$,

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix},$$

definiert die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ).

(a) Berechnen Sie das lokale 3-Bein an der Stelle $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \phi)$. Definieren Sie damit die lokale Orthonormalbasis (e_r, e_θ, e_ϕ).

(b) Drücken Sie den Gradienten von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit Hilfe von grad $(f \circ \Phi)$ und der lokalen ONB im Punkt $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \phi)$ aus.
Hinweis: Sind die Vektoren $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$ paarweise orthogonal zueinander, dann gilt für $B := \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dass $B^{T^{-1}} = B^{-1^T} = \begin{pmatrix} \|b_1\|^{-2} b_1 & \cdots & \|b_n\|^{-2} b_n \end{pmatrix}$.

(c) Berechnen Sie den Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten.

158. Koordinatentransformation

Seien $U =]0,1[^2$ das offene Quadrat, $V = \{x \in \,]0,1[^2 \,|\, x_1 + x_2 < 1\}$ der offene Simplex und $\Phi : U \to V$ die sogenannte Simplex-Transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1(1-\xi_2) \\ \xi_1\xi_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Umkehrtransformation $\Psi := \Phi^{-1} : V \to U$.

(b) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in V.

(c) Bestimmen Sie $D\Phi(\xi)$ und $D\Psi(x)$ und das unnormierte lokale Zweibein $\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)$.

(d) Sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} = f \circ \Psi : V \to \mathbb{R}$. Drücken Sie den Gradienten von $\tilde{f}$ durch Ableitungen von f in der Basis η_1, η_2 aus.

159. Eine implizit definierte Kurve

Gegeben sind die beiden Gleichungen $x^2+y^2+z^2 = 1-xy-xz$ und $2x^2+y^2 = 6+x+xz-yz$. Die Lösungsmenge enthält den Punkt $P = (x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 1)$.

(a) Man versuche, die Lösungsmenge in einer Umgebung von P explizit durch x zu parametrisieren.

(b) Berechnen Sie die Tangente der Lösungskurve durch den Punkt P.

Abgabe der Hausaufgaben: 27.06.2011, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung