Zentralübung

135. Evolute einer Kurve

Die Evolute einer zweimal stetig differenzierbaren Kurve γ ist die Kurve, die sich aus den Krümmungskreismittelpunkten $\gamma_M(t) = \gamma(t) + \frac{\|\dot\gamma(t)\|^2}{\dot\gamma_1(t)\ddot\gamma_2(t) - \ddot\gamma_1(t)\dot\gamma_2(t)}\binom{-\dot\gamma_2(t)}{\dot\gamma_1(t)}$ von γ zusammensetzt.

(a) Zeigen Sie, dass für festes t_0 der Kreis mit Radius $\frac{1}{|\kappa_\gamma(t_0)|}$ um $\gamma_M(t_0)$, der im Punkt $\gamma(t_0)$ den selben Tangentialeinheitsvektor wie γ besitzt, dort auch die selbe Krümmung wie γ hat.

(b) Bestimmen Sie die Evolute der Parabel $\{y = \frac{1}{2}x^2\}$.

136. Kettenlinie

Ein ideales Seil wird über einen 2km breiten Abgrund gespannt und werde durch die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x) = (x, f(x))$ und

$$f(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - \cosh a), \quad a > 0,$$

beschrieben (Einheit 1km).

(a) Berechnen Sie die Länge L des Seils in Abhängigkeit von a.

(b) Wie groß ist die Krümmung am Scheitel und an den Rändern?

(c) Wie stark hängt das Seil (in erster Näherung) durch, wenn es 1mm, 10cm, bzw., 1m zu lang ist?

Hausaufgaben

137. Fläche einer Kurve in Polarkoordinaten

Sei $\gamma(t) = \binom{r(t)\cos\phi(t)}{r(t)\sin\phi(t)}$.

(a) Zeigen Sie, dass die vom Fahrstrahl zwischen Ursprung und $\gamma(t)$ für $t \in [0, T]$ überstrichene Fläche gegeben ist durch

$$A(T) = \frac{1}{2}\int_0^T r^2\dot\phi\, dt.$$

(b) Berechnen Sie die Fläche des Kleeblatts, $\phi(t) = t$, $r(t) = \cos 2t$, $t \in [0, 2\pi]$.

138. Die Evolute einer Zykloide ist wieder eine Zykloide

Berechnen Sie die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte der Zykloide $\gamma(t) = \binom{t+\sin t}{1-\cos t}$, d.h., die Evolute von γ gemäß der Formel in Aufgabe 135.

139. Die Klothoide

Die Kurve $\gamma(s) := \left(\int_0^s \cos(\frac{1}{2}t^2)dt, \int_0^s \sin(\frac{1}{2}t^2)dt\right)$, $s \in \mathbb{R}$, heißt Klothoide.

(a) Zeigen Sie, dass γ auf Bogenlänge parametrisiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(s)$ proportional zu s ist.

(c) Skizzieren Sie die Klothoide.

(d) $\gamma([-1, 1])$ ist der Graph einer Funktion f. Geben Sie die Taylorentwicklung von f im Ursprung bis zur 10. Ordnung an.

Abgabe der Hausaufgaben: 30.05.2011, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung