Zentralübung

130. Intrinsische Metrik einer wegzusammenhängenden Menge

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine wegzusammenhängende Menge mit

$$d(x,y) := \inf\{L(\gamma) : \ \gamma : [0,1] \to A \text{ ist stetig mit } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} < \infty$$

für $x, y \in A$. Zeigen Sie das (A, d) ein metrischer Raum ist.

131. Ellipsen

Gegeben ist die Ellipse $C = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ mit $0 < b < a$.

(a) Zeigen Sie, dass C die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^2$ ist, für die die Summe der Abstände zu den beiden Brennpunkten $(\pm f, 0)$, $f = \sqrt{a^2 - b^2}$ gleich $2a$ ist.

(b) Parametrisieren Sie die Ellipse $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, $0 < b < a$, nach der Bogenlänge.

Hinweis: Verwenden Sie dazu die Funktion $E_k(t) = \int\limits_0^t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}\, d\phi$, $k \in]0, 1[$, (unvollständiges elliptisches Integral 2. Art).

Hausaufgaben

132. Neilsche Parabel

Parametrisieren Sie die durch die Punktmenge $\{y^2 - x^3 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ gegebene Kurve nach der Bogenlänge.

133. Parametrisierung einer Ellipse in Polarkoordinaten um den Brennpunkt

Seien $r > 0$, $\epsilon \in]0, 1[$. $r(\phi) := \frac{r}{1+\epsilon \cos\phi}$, $\phi \in [-\pi, \pi]$, definiert die Kurve $\gamma(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$.

(a) Berechnen Sie den Tangentialvektor zu gegebenem ϕ.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte der Kurve mit senkrechter oder waagrechter Tangente.

(c) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt der Kurve das Verhältnis aus Entfernung zum Ursprung und Abstand von der Geraden $\{x = \frac{r}{\epsilon}\}$ gleich ϵ ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Spur von γ eine Ellipse ist. Identifizieren Sie dazu den Mittelpunkt und die Halbachsen mit Hilfe von (b).

134. Länge einer Kurve in Polarkoordinaten

Die ebene Kurve $\gamma(t)$ sei in Polarkoordinaten gegeben, dass heißt $r(t)$ und $\phi(t)$ sind bekannt und $\gamma(t) = \binom{r(t)\cos\phi(t)}{r(t)\sin\phi(t)}$.

(a) Zeigen Sie, das die Bogenlänge von $\gamma : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch

$$L(\gamma) = \int\limits_0^\infty \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}\, dt.$$

(b) Sei nun $\phi(t) = t$ und $r : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ stetig differenzierbar, $\dot{r}(t) < 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 0$. Zeigen Sie, dass $L(\gamma) < \infty$, genau dann, wenn $r(t)$ auf $[0, \infty[$ integrierbar ist.

Abgabe der Hausaufgaben: 23.05.2011, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung