TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. H. Spohn
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Sommersemester 2011
Blatt 3
(09.05.2011)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9203_2011S

Zentralübung

124. Stetigkeit der Umkehrfunktion

Seien K, M metrische Räume, K kompakt. Man zeige: ist $f : K \to M$ stetig und bijektiv, so ist f ein **Homöomorphismus**, d.i., f ist Bijektion und f, f^{-1} sind stetig.

125. Modifikation einer Metrik

Sei (M, d) ein metrischer Raum

(a) Ist $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ stetig, streng monoton wachsend und konkav mit $f(0) = 0$, so ist $(M, \tilde{d})$, $\tilde{d} := f \circ d$, ein metrischer Raum.

(b) $x_n \to x$ bezüglich $d \Leftrightarrow x_n \to x$ bezüglich $\tilde{d}$.

(c) Aus (x_n) Cauchy-Folge bezüglich $\tilde{d}$ folgt nicht: (x_n) ist Cauchy-Folge bezüglich d.

126. Wegzusammenhang, Gebiete im $\mathbb{R}^d$

Eine Teilmenge A des euklidischen $\mathbb{R}^d$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu jedem $x, y \in A$ ein stetiges $\gamma : [0, 1] \to A$ gibt mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

(a) Ist A wegzusammenhängend, so ist A zusammenhängend.

(b) Ist A zusammenhängend und offen, so ist A wegzusammenhängend.

(c) Der Graph von $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ für $x > 0$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Definition: Eine offene nichtleere zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ heißt **Gebiet**.

Hausaufgaben

127. Beispiele für (Un-)Stetigkeit

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{y}{x^2} e^{-\left|\frac{y}{x^2}\right|}$ für $x \neq 0$, $f(0, y) = 0$ sonst.

(a) f ist eine beschränkte Funktion und stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(b) f eingeschränkt auf eine beliebige Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$ ist stetig.

(c) f ist unstetig im Ursprung.

(d) $g(x, y) := xf(x, y)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

128. Polarkoordinaten

Die Abbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(r, \phi) = (\tilde{x}(r, \phi), \tilde{y}(r, \phi))$ mit $\tilde{x}(r, \phi) = r \cos \phi$, $\tilde{y}(r, \phi) = r \sin \phi$, ist stetig. Eingeschränkt auf $D := \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$ ist $P|_D : D \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bijektiv. Zeigen Sie:

(a) Die Umkehrabbildung $(P|_D)^{-1}(x, y) = (\tilde{r}(x, y), \tilde{\phi}(x, y))$ ist nicht stetig.

(b) Mit $\mathring{D} = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, offen, ist $P|_{\mathring{D}} : \mathring{D} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ sogar ein Homöomorphismus.

129. Die Kugelsphäre

$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 | \, \|x\| = 1\}$ ist die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Für $x, y \in S^2$ sei $d(x, y) := \operatorname{acos} \langle x, y \rangle$, wobei $\operatorname{acos} = \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Zeigen Sie:

(a) $d(x, y)$ ist die Länge des Großkreisbogens von x zu y (“as the crow flies”).

(b) (S^2, d) ist eine metrischer Raum.
Hinweis: $\sin(d(x, y)) = \|x \times y\|$, $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$.

(c) $d(x, y) = 2 \operatorname{asin} \frac{\|x-y\|}{2}$ und $\mathrm{id} : (S^2, \|\cdot\|) \to (S^2, d)$, $\mathrm{id}(x) = x$, ist ein Homöomorphismus.

Abgabe der Hausaufgaben: 16.05.2011, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung