

**Zentralübung****117. Beschränktheit**

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt, wenn $A \subset B_R(0)$ für ein $R > 0$.
Zeigen Sie: A ist genau dann beschränkt, wenn $\text{diam}(A) < \infty$.

118. Komponentenweise Konvergenz

Sei $(x^{(n)})$ eine Folge in \mathbb{R}^d . $(x^{(n)})$ ist genau dann Cauchy-Folge, wenn $(x_j^{(n)}) \subset \mathbb{R}$ Cauchy-Folge ist für $j = 1, \dots, d$.

119. Induzierte Metrik auf Teilmengen

Sei N Teilmenge eines metrischen Raums (M, d) . Dann ist (N, d') mit $d' = d|_{N \times N}$ wieder ein metrischer Raum, man nennt d' die auf N induzierte Metrik. Zu jeder Menge $A \subset M$ ist $A' := A \cap N \subset N$. Jedes $B \subset N$ kann auch als Teilmenge des metrischen Raums M aufgefasst werden. Untersuchen Sie, wie sich die Teilmengeattribute *offen*, *abgeschlossen*, *beschränkt*, *kompakt*, *zusammenhängend* von $A \subset (M, d)$ auf $A' \subset (N, d')$, bzw., von $A \subset (N, d')$ auf $A \subset (M, d)$ übertragen.

120. Charakterisierung der Stetigkeit in metrischen Räumen

Zeigen Sie die Äquivalenz von ϵ - δ -Stetigkeit und Folgenstetigkeit in metrischen Räumen.

Hausaufgaben**121. Charakterisierung der Abgeschlossenheit**

Die Teilmenge A eines metrischen Raums (M, d) heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. Zeigen Sie:

$A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn jede konvergente Folge aus A ihren Grenzwert in A hat. (Abgeschlossenheit unter Grenzwertbildung)

122. Satz von Bolzano-Weierstraß

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über d , dass jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^d eine konvergente Teilfolge besitzt. (Der Fall $d = 1$ kann vorausgesetzt werden.)

123. Eigenschaften von Bild- und Urbildmengen unter stetigen Abbildungen

Seien (M, d) , (N, \tilde{d}) metrische Räume, $f : M \rightarrow N$ stetig. Untersuchen Sie, wie sich die Teilmengeattribute *offen*, *abgeschlossen*, *beschränkt*, *kompakt*, *zusammenhängend*

(a) von $B \subset N$ auf $f^{-1}(B) \subset M$, (b) von $A \subset M$ auf die Bildmenge $f(A) \subset N$

übertragen.

Abgabe der Hausaufgaben: 09.05.2011, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung