MA9202 Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1), Prof. Dr. M. Wolf
Probeklausur, 17.12.2019, 14:15-15:45

1. **Wahr oder falsch?** **[10 Punkte]**

Entscheiden Sie jeweils mit kurzer Begründung ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Ist die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

(b) Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-\cos(4x^2)}$ nimmt ihr Minimum auf $[0,1]$ an.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.

(d) Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$ existiert.

Lösung:

(a) falsch **[1]**. Gegenbeispiel, die unbeschränkte stetige Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. **[1]**

(b) Richtig. f ist stetig auf $[-1,1]$ **[1]**. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum nimmt sie ihr Mimimum auf $[-1,1]$ an **[1]**. Da f gerade ist, ist mit jeder Minimalstelle $x \in [-1,0)$ auch $-x$ eine Minimalstelle. Also nimmt f sein Minimum sogar auf $[0,1]$ an. **[1]**

(c) Falsch. Die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ erfült die Bedingungen **[1]**, ergibt aber die divergente harmonische Reihe. **[1]**

(d) Richtig. Da Zähler und Nenner für $x \to 1$ gegen Null streben **[1]**, gilt nach der L'Hospitalschen Regel

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} \overset{[1]}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} x = 1, \qquad [\mathbf{1}]$$

da der zweite Grenzwert in obiger Zeile existiert.

2. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion nach n, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m \leq n^{m+1}.$$

Lösung:

Induktionsbeginn ($n = 1$): $\sum\limits_{k=1}^{1} k^m = 1^m = 1 \leq 1 = 1^{m+1}$ **[2]**

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^m &\overset{[1]}{=} \sum_{k=1}^{n} k^m + (n+1)^m \\
&\overset{\text{I.V.}[2]}{\leq} n^{m+1} + (n+1)^m \overset{[1]}{=} n \cdot n^m + (n+1)^m \\
&\overset{(*)[1]}{\leq} n \cdot (n+1)^m + 1 \cdot (n+1)^m \overset{[1]}{=} (n+1)^{m+1}.
\end{aligned}$$

$(*)$ Monotonie der Potenz

3. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

(a) Geben Sie (in kartesischer Form) eine komplexe Zahl z_0 an, die mit $2+\mathrm{i}$ multipliziert $7-4\mathrm{i}$ ergibt.

$$\boxed{z_0 = 2 - 3\mathrm{i} \qquad \textbf{[2]}}$$

(b) Geben Sie explizit die Menge aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ an, für die $z^3 = \mathrm{i}$ gilt (in Polarform).

$$\boxed{\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^3 = \mathrm{i}\} = \{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\} \qquad \textbf{[4]}}$$

LÖSUNG:

(a) $z_0 = \frac{7-4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(7-4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{2^2+1^2} = \frac{14-4-8\mathrm{i}-7\mathrm{i}}{5} = 2-3\mathrm{i}$.

(b) $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Eine Lösung ist $\mathrm{i}^{\frac{1}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Wegen $(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})^3 = 1$ sind $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ und $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}+2\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} (= -\mathrm{i})$. (ein Punkt für jede Lösung. Vierter Punkt für genau drei Lösungen und Mengenklammern.)

4. **Grenzwerte von Folgen** **[8 Punkte]**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen.

(a) Wie lautet die Definition, dafür, dass (a_n) gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert?

$$\boxed{\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon \qquad \textbf{[2]}}$$

(b) Wie lautet die Definition, dafür, dass (b_n) uneigentlich gegen $-\infty$ konvergiert?

$$\boxed{\forall K \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : a_n < -K \qquad \textbf{[2]}}$$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen in (a) und (b), dass $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uneigentlich gegen $-\infty$ konvergiert.

LÖSUNG:

(a) , (b), siehe oben. Dabei kann fasst überall auch $\leq$ statt $<$ und $\geq$ statt $>$ stehen.

(c) Sei $K \in \mathbb{R}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass für all $n > N$ gilt $|a_n - a| < 1$ und $b_n < -K - |a| - 1$. **[2]**
Dann gilt für alle $n > N$:

$$a_n + b_n < a + 1 - K - |a| - 1 = (a - |a|) - K \leq -K, \qquad \textbf{[2]}$$

Somit ist $a_n + b_n \to -\infty$ gezeigt.

5. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Welchen Grenzwert besitzt die Folge $\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)_{n\in\mathbb{N}}$? **[2]**

☐ $-\infty$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☒ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2^n}{3^{n+1}}$? **[2]**

☒ $-\frac{3}{4}$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{9}{10}$ ☐ ∞ ☐ undefiniert

(c) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-n)^{-n}$? **[3]**

☐ bei $-\infty$ ☐ in $(-\infty, 0)$ ☐ bei 0 ☒ in $(0, \infty)$ ☐ bei $+\infty$ ☐ undefiniert

LÖSUNG:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{2}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-n)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-n)^n} = 0^0 + \frac{1}{(-1)^1} + \frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^3} \pm \cdots = 1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} \pm \cdots$. Die Reihe ist nach dem Leibnitzkriterium (alternierende betragsmäßig monotone Nullfolge) konvergent. Die Teilfolge der geradzahligen Partialsummen ist streng monoton steigend und beginnt mit 0. Daher ist der Grenzwert positiv.

6. **Stetige Funktionen** **[6 Punkte]**

(a) Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$. HINWEIS: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$.

(b) Geben Sie explizit eine Funktion $g : [0, 1] \to [0, 1]$ an, die **keinen** Fixpunkt besitzt.

LÖSUNG:

(a) Sei $g(x) = f(x) - x$, dann ist auch g stetig. **[1]**
Weiter ist $g(0) \in [0, 1]$ und $g(1) \in [-1, 0]$. **[1]**
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $g(x_0) = 0$. **[1]**
Somit gilt $f(x_0) = g(x_0) + x_0 = x_0$. x_0 ist also ein Fixpunkt von f. **[1]**

(b) $g : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x)$. **[2]**

7. **Zweite Ableitung der Umkehrfunktion** **[9 Punkte]**

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und bezeichne $g : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Zeigen Sie, dass g zweimal differenzierbar ist und berechnen Sie $g'' : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Geben Sie $g''(1)$ an, wenn $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ und $f''(0) = 3$ ist.

LÖSUNG:

Für $y \in f(\mathbb{R})$ gilt nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion **[1]**

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Die rechte Seite (also Funktionen von y) ist als Kombination differenzierbarer Funktionen differenzierbar, also ist auch die linke Seite differenzierbar. Somit ist g zweimal differenzierbar. **[2]**
Nun berechnen wir diese Ableitung noch:

$$g''(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{f'(g(y))} \overset{[1]}{=} -\frac{1}{f'(g(y))^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f'(g(y)) \overset{[1]}{=} -\frac{1}{f'(g(y))^2} f''(g(y))g'(y) \overset{[1]}{=} -\frac{f''(g(y))}{f'(g(y))^3}$$

Schließlich folgt aus $f(0) = 1$, dass $g(1) = 0$ ist. Daher ist **[1]**

$$g''(1) = -\frac{f''(g(1))}{f'(g(1))^3} = -\frac{f''(0)}{f'(0)^3} = -\frac{3}{8}. \qquad [\mathbf{2}]$$

8. **Extremwertbestimmung** **[8 Punkte]**

Gegeben ist $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (8 - x^2)(x - 1)^3$.

(a) Warum gibt es $x_u, x_o \in [-3, 3]$, so dass $f(x_u) = \min_{x\in[-3,3]} f(x)$ und $f(x_o) = \max_{x\in[-3,3]} f(x)$?

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Ableitung von f.

(c) Bestimmen Sie nun x_u und x_o wie in (a).

Lösung:

(a) f ist als Polynom stetig. **[1]**
Nach dem Satz vom Maximum nimmt f also auf dem kompakten Intervall $[-3, 3]$ sein Maximum (und Minimum) an. **[1]**

(b) $f'(x) = -2x(x-1)^3 + (8-x^2)3(x-1)^2 = (x-1)^2(-2x^2 + 2x + 24 - 3x^2)$. **[1]**
Die Nullstellen dieses Polynoms 4-ten Grades sind zweimal $x_1 = 1$ und die Nullstellen von $5x^2 - 2x - 24$, nämlich $x_{2,3} = \frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 120}}{10} = \frac{1\pm\sqrt{121}}{5} = \frac{1\pm 11}{5}$, also $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{12}{5}$. **[2]**

(c) Die globalen Extremwerte können sich nur am Rand des Definitionsbereichs oder bei Punkten mit verschwindender Ableitung befinden. **[1]**
Wir berechnen

$$\begin{aligned}
f(-3) &= (-1)(-64) = 64,\\
f(-2) &= 4\cdot(-27) = -108,\\
f(1) &= 0,\\
f(\tfrac{12}{5}) &= (\tfrac{40}{25} - \tfrac{144}{25})(-\tfrac{7}{5})^3 = \tfrac{104}{25}\cdot\tfrac{49\cdot 7}{125} < \tfrac{104\cdot 2\cdot 7}{125} < 2\cdot 7 = 14 < 64, \qquad [\mathbf{1}]\\
f(3) &= (-1)\cdot 8 = -8.
\end{aligned}$$

Das Maximum 64 wird also im Punkt $x_o = -3$ angenommen, dass Minimum -108 im Punkt $x_u = -2$. **[1]**