Name: [ ] Gruppe: [ ]

MA9202 Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1), Prof. Dr. M. Wolf
Probeklausur, 17.12.2019, 14:15-15:45

Hilfsmittel: ein selbsterstelltes DIN-A4 Blatt.
Bei **Multiple-Choice-Aufgaben** sind keine, eine oder mehrere, in jedem Fall jedoch **genau** die zutreffenden Aussagen, anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästen werden nur die Resultate **in diesen Kästen** berücksichtigt.
Frei zu bearbeitende Aufgaben(-teile) lösen Sie bitte auf dem bereitgestellten karierten Bearbeitungsbogen und kennzeichnen diese deutlich.
Zur Abgabe legen Sie bitte die Angabe in den Bearbeitungsbogen und schreiben auf diesen oben deutlich Namen und Ihre Präsenzgruppe.

Viel Erfolg!

1. **Wahr oder falsch?** **[10 Punkte]**

   Entscheiden Sie jeweils mit kurzer Begründung ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

   (a) Ist die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

   (b) Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-\cos(4x^2)}$ nimmt ihr Minimum auf $[0,1]$ an.

   (c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

   (d) Der Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$ existiert.

2. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion nach n, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m \leq n^{m+1}.$$

3. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

   (a) Geben Sie (in kartesischer Form) eine komplexe Zahl z_0 an, die mit $2+\mathrm{i}$ multipliziert $7-4\mathrm{i}$ ergibt.

   $z_0 =$

   (b) Geben Sie explizit die Menge aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ an, für die $z^3 = \mathrm{i}$ gilt (in Polarform).

   $\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^3 = \mathrm{i}\} =$

4. **Grenzwerte von Folgen** **[8 Punkte]**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen.

(a) Wie lautet die Definition, dafür, dass (a_n) gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert?

(b) Wie lautet die Definition, dafür, dass (b_n) uneigentlich gegen $-\infty$ konvergiert?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen in (a) und (b), dass $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uneigentlich gegen $-\infty$ konvergiert.

5. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Welchen Grenzwert besitzt die Folge $\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

☐ $-\infty$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Welchen Wert besitzt die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2^n}{3^{n+1}}$?

☐ $-\dfrac{3}{4}$ ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{3}{5}$ ☐ $\dfrac{2}{3}$ ☐ $\dfrac{9}{10}$ ☐ ∞ ☐ undefiniert

(c) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-n)^{-n}$?

☐ bei $-\infty$ ☐ in $(-\infty, 0)$ ☐ bei 0 ☐ in $(0, \infty)$ ☐ bei $+\infty$ ☐ undefiniert

6. **Stetige Funktionen** **[6 Punkte]**

(a) Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$.

(b) Geben Sie explizit eine Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ an, die **keinen** Fixpunkt besitzt.

7. **Zweite Ableitung der Umkehrfunktion** **[9 Punkte]**

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und bezeichne $g : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Zeigen Sie, dass g zweimal differenzierbar ist und berechnen Sie $g'' : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Geben Sie $g''(1)$ an, wenn $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ und $f''(0) = 3$ ist.

8. **Extremwertbestimmung** **[8 Punkte]**

Gegeben ist $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (8 - x^2)(x-1)^3$.

(a) Warum gibt es $x_u, x_o \in [-3,3]$, so dass $f(x_u) = \min\limits_{x\in[-3,3]} f(x)$ und $f(x_o) = \max\limits_{x\in[-3,3]} f(x)$?

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Ableitung von f.

(c) Bestimmen Sie nun x_u und x_o wie in (a).