



**Hinweise zur Personalisierung:**

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

# Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1)

**Klausur:** MA9202 / Modulprüfung

**Datum:** Freitag, 21. Februar 2020

**Prüfer:** Prof. Dr. Michael M. Wolf

**Uhrzeit:** 10:30 – 12:00

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8
I								

## Bearbeitungshinweise

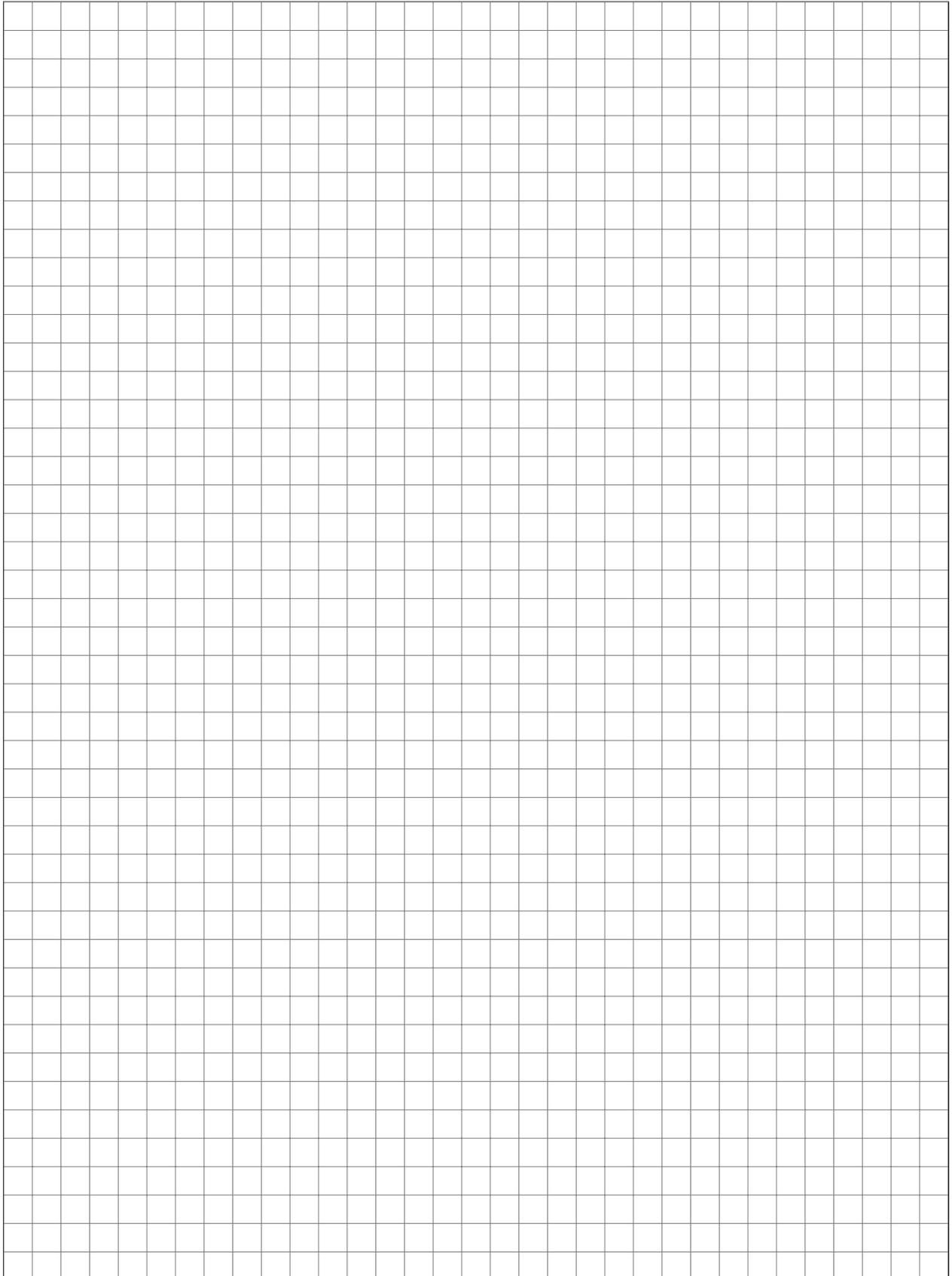
- Diese Klausur umfasst **12 Seiten** mit insgesamt **8 Aufgaben**.  
Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 77 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein **selbsterstelltes DIN A4 Blatt**
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.

Hörsaal verlassen von \_\_\_\_\_ bis \_\_\_\_\_ / Vorzeitige Abgabe um \_\_\_\_\_

# Aufgabe 1 Vollständige Induktion (8 Punkte)

0  Zeigen Sie, z.B. mit einer Tabelle und unter Zuhilfenahme von vollständiger Induktion, dass  
1  gilt:  
2   
3   
4   
5   
6   
7   
8

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3\} : n^2 \leq 2^n.$$



## Aufgabe 2 Konvergenz von Folgen und Reihen (8 Punkte)

Entscheiden Sie jeweils (ohne Begründung), ob die untenstehenden Folgen und Reihen (uneigentlich) konvergieren und geben Sie, wenn möglich ihren Grenzwert an.

(a)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^n}\right)^{2n^n}$

0  
 1  
 2

(b)  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_1 = \pi$ ,  $b_{n+1} = \frac{1}{2} \left(b_n + \frac{\pi}{b_n}\right)$  für  $n \in \mathbb{N}$

0  
 1  
 2

(c)  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_1 = 1$ ,  $c_{n+1} = c_n + \sqrt{1 + |c_n|^{\frac{1}{n}}}$  für  $n \in \mathbb{N}$

0  
 1  
 2

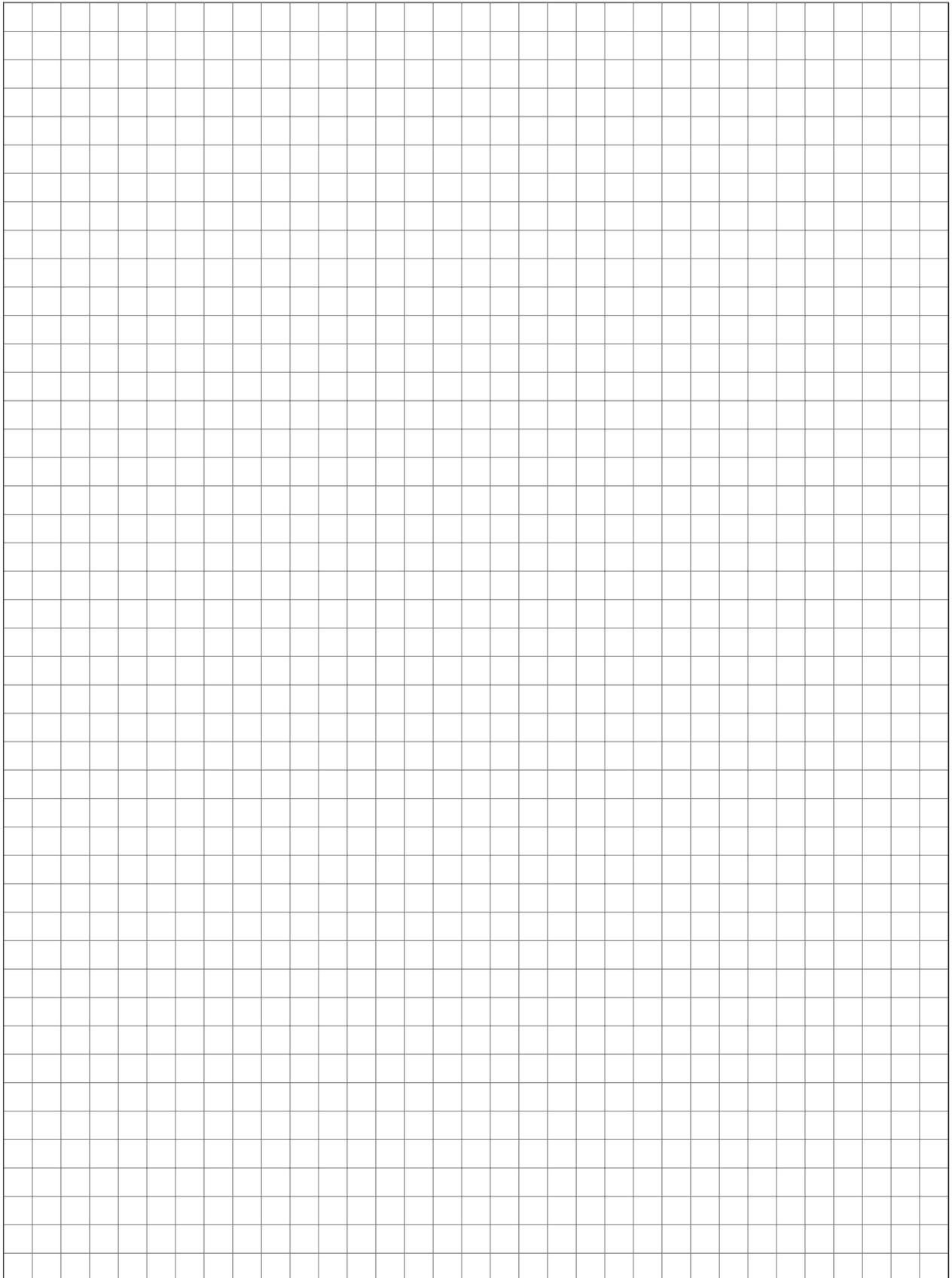
(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+3i}{5}\right)^n$

0  
 1  
 2

### Aufgabe 3 Konvergenzradius (8 Punkte)

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8

Leiten Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe  $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2q)^{(k^2)} z^k$  in Abhängigkeit von  $q \in \mathbb{C}$  her.



## Aufgabe 4 Zwischenwerteigenschaft der Ableitung (9 Punkte)

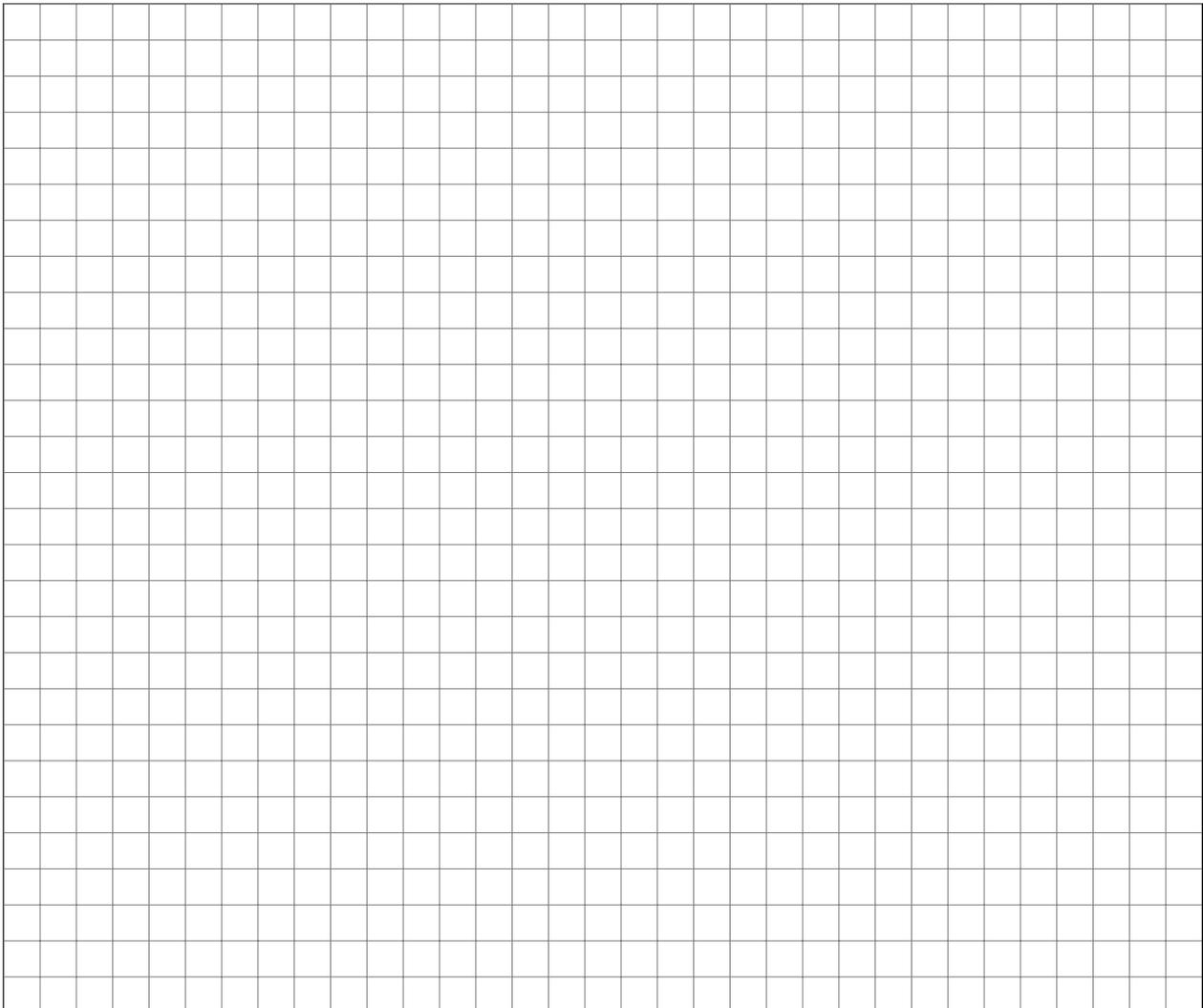
(a) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f'(a) > 0$ . Beweisen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitung, dass es ein  $x \in (a, b)$  gibt mit  $f(x) > f(a)$ .

0  
 1  
 2  
 3  
 4



(b) Sei nun  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f'(a) > 0 > f'(b)$ . Beweisen Sie, dass es ein  $x \in (a, b)$  gibt, mit  $f'(x) = 0$ . HINWEIS: Diskutieren Sie Extrema von  $f$ .

0  
 1  
 2  
 3  
 4  
 5



## Aufgabe 5 Taylorentwicklung (11 Punkte)

In dieser Aufgabe werden keine Folgefehler berücksichtigt.

- 0   
1   
2
- (a) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genügend oft differenzierbar. Wie lautet das Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung von  $f$  im Entwicklungspunkt 0?

$$T_n f(x; 0) =$$

- 0   
1   
2
- (b) Sei im Folgenden  $f(x) = \arctan(x^2)$ . Berechnen sie die Ableitung von  $f$ .

$$f'(x) =$$

- 0   
1   
2   
3
- (c) Geben Sie das Taylorpolynom 9. Ordnung von  $f'$  im Entwicklungspunkt 0 an:

$$T_9(f')(x; 0) =$$

- 0   
1   
2   
3   
4
- (d) Wie lauten die ersten drei von 0 verschiedenen Terme der Taylorentwicklung von  $f$ ,  $f(x) = \arctan(x^2)$ , im Entwicklungspunkt 0?

$$f(x) =$$



## Aufgabe 7 Fourierkoeffizienten (15 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die  $2\pi$ -periodische Funktion mit  $f(x) = |x|$  für  $|x| \leq \pi$ .

- 0   
1   
2

(a) Skizzieren Sie den Graph von  $f$  im Bereich  $[-3\pi, 3\pi]$ .

- 0   
1   
2   
3   
4   
5   
6   
7   
8   
9   
10   
11

(b) Berechnen Sie die Fourierkosinus-Koeffizienten  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$  von  $f$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ .

(c) Die Fourierreihe  $x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$  konvergiert gegen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

nicht

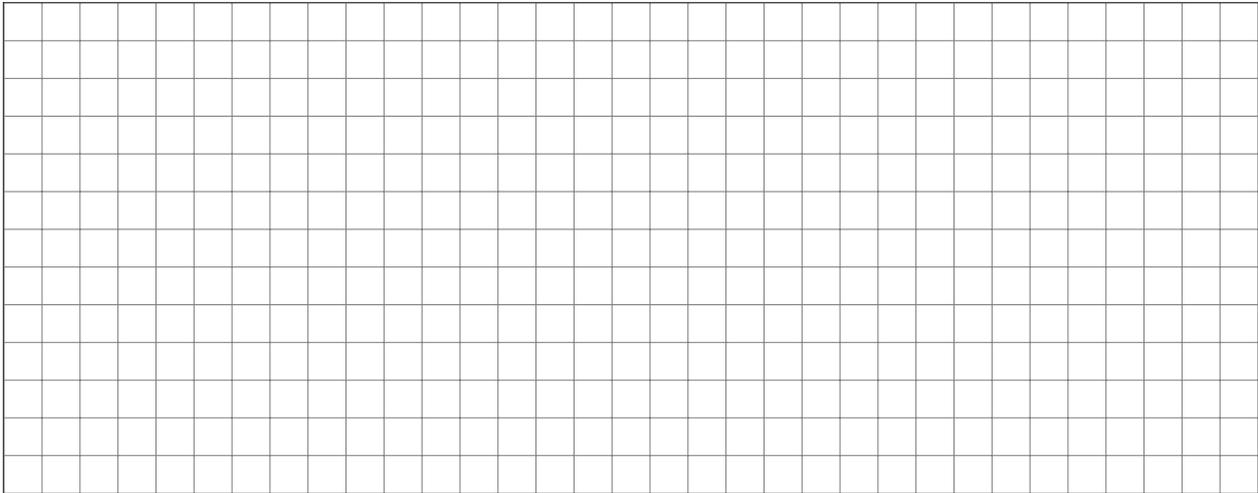
punktweise

gleichmäßig

## Aufgabe 8 Matrixexponential (10 Punkte)

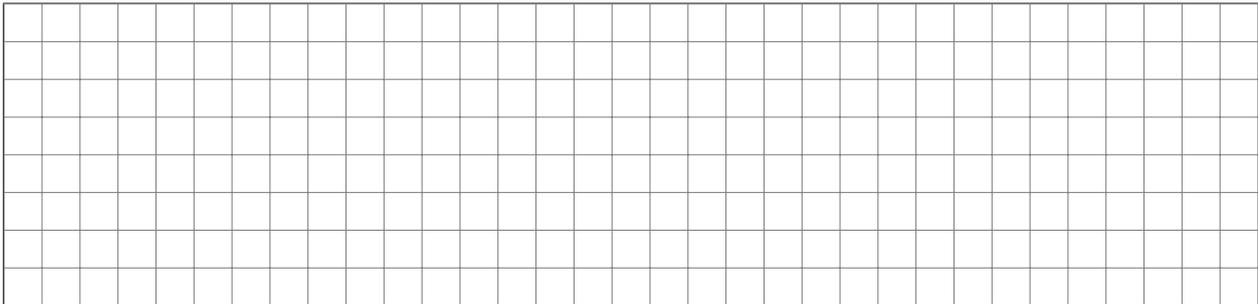
(a) Sei  $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Weisen Sie nach, dass  $U(t) = e^{tA}$  ist, indem Sie  $\frac{d}{dt}U(t) = AU(t)$  zeigen.

0  
 1  
 2  
 3  
 4



(b) Sei nun  $C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$  mit  $c \in \mathbb{R}$ . Begründen Sie kurz, warum  $e^{tA+C} = e^{tA}e^C$  ist.

0  
 1  
 2



(c) Wie lautet also explizit das Matrixexponential von  $\begin{pmatrix} c & -t \\ t & c \end{pmatrix}$ ?

0  
 1  
 2  
 3  
 4

$$\exp \begin{pmatrix} c & -t \\ t & c \end{pmatrix} =$$

Zusätzlicher Platz für Lösungen und Nebenrechnungen. Nur deutlich referenzierte und gekennzeichnete Lösungen können für eine Aufgabe gewertet werden.

