Lehrstuhl für Mathematische Physik
Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Eexam
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1)

Klausur: MA9202 / Modulprüfung **Datum:** Freitag, 21. Februar 2020
Prüfer: Prof. Dr. Michael M. Wolf **Uhrzeit:** 10:30 – 12:00

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8
I								

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **12 Seiten** mit insgesamt **8 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 77 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein **selbsterstelltes DIN A4 Blatt**
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.

Hörsaal verlassen von __________ bis __________ / Vorzeitige Abgabe um __________

Aufgabe 1 Vollständige Induktion (8 Punkte)

0
1
2
3
4
5
6
7
8

Zeigen Sie, z.B. mit einer Tabelle und unter Zuhilfenahme von vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{3\} : n^2 \leq 2^n.$$

Aufgabe 2 Konvergenz von Folgen und Reihen (8 Punkte)

Entscheiden Sie jeweils (ohne Begründung), ob die untenstehenden Folgen und Reihen (uneigentlich) konvergieren und geben Sie, wenn möglich ihren Grenzwert an.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^n}\right)^{2n^n}$

0 1 2

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_1 = \pi$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{\pi}{b_n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$

0 1 2

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n + \sqrt{1 + |c_n|^{\frac{1}{n}}}$ für $n \in \mathbb{N}$

0 1 2

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+3\mathrm{i}}{5}\right)^n$

0 1 2

Aufgabe 3 **Konvergenzradius (8 Punkte)**

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Leiten Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2q)^{(k^2)} z^k$ in Abhängigkeit von $q \in \mathbb{C}$ her.

Aufgabe 4 **Zwischenwerteigenschaft der Ableitung (9 Punkte)**

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) > 0$. Beweisen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitung, dass es ein $x \in (a, b)$ gibt mit $f(x) > f(a)$.

☐ 0
☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ 4

(b) Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) > 0 > f'(b)$. Beweisen Sie, dass es ein $x \in (a, b)$ gibt, mit $f'(x) = 0$. Hinweis: Diskutieren Sie Extrema von f.

☐ 0
☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ 4
☐ 5

Aufgabe 5 **Taylorentwicklung (11 Punkte)**

In dieser Aufgabe werden keine Folgefehler berücksichtigt.

0 1 2

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügend oft differenzierbar. Wie lautet das Taylorpolynom n-ter Ordnung von f im Entwicklungspunkt 0?

$$T_n f(x; 0) =$$

0 1 2

(b) Sei im Folgenden $f(x) = \arctan(x^2)$. Berechnen sie die Ableitung von f.

$$f'(x) =$$

0 1 2 3

(c) Geben Sie das Taylorpolynom 9. Ordnung von f' im Entwicklungspunkt 0 an:

$$T_9(f')(x; 0) =$$

0 1 2 3 4

(d) Wie lauten die ersten drei von 0 verschiedenen Terme der Taylorentwicklung von f, $f(x) = \arctan(x^2)$, im Entwicklungspunkt 0?

$$f(x) =$$

Aufgabe 6 **Integration (8 Punkte)**

Sei $f : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar mit $f(a) = c$, $f(b) = d$ und $f'(x) > 0$ für $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass gilt:

0
1
2
3
4
5
6
7
8

$$\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = bd - ac - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

HINWEIS: Benutzen Sie die Funktion f zur Substitution und verwenden dann partielle Integration.

Aufgabe 7 **Fourierkoeffizienten (15 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = |x|$ für $|x| \leq \pi$.

0 1 2

(a) Skizzieren Sie den Graph von f im Bereich $[-3\pi, 3\pi]$.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

(b) Berechnen Sie die Fourierkosinus-Koeffizienten $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x$ von f für $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Die Fourierreihe $x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ konvergiert gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

☐ nicht ☐ punktweise ☐ gleichmäßig

Aufgabe 8 **Matrixexponential (10 Punkte)**

(a) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass $U(t) = \mathrm{e}^{tA}$ ist, indem Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t) = AU(t)$ zeigen.

0 1 2 3 4

(b) Sei nun $C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Begründen Sie kurz, warum $\mathrm{e}^{tA+C} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{C}$ ist.

0 1 2

(c) Wie lautet also explizit das Matrixexponential von $\begin{pmatrix} c & -t \\ t & c \end{pmatrix}$?

0 1 2 3 4

$$\exp \begin{pmatrix} c & -t \\ t & c \end{pmatrix} =$$

Zusätzlicher Platz für Lösungen und Nebenrechnungen. Nur deutlich referenzierte und gekennzeichnete Lösungen können für eine Aufgabe gewertet werden.