Lehrstuhl für Mathematische Physik
Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Esolution
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1)

Klausur: MA9202 / Modulprüfung
Prüfer: Prof. Dr. Michael M. Wolf
Datum: Freitag, 21. Februar 2020
Uhrzeit: 10:30 – 12:00

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8
I								

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **12 Seiten** mit insgesamt **8 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 77 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein **selbsterstelltes DIN A4 Blatt**
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.

Hörsaal verlassen von ________ bis ________ / Vorzeitige Abgabe um ________

Aufgabe 1 Vollständige Induktion (8 Punkte)

0
1
2
3
4
5
6
7
8

Zeigen Sie, z.B. mit einer Tabelle und unter Zuhilfenahme von vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{3\} : n^2 \leq 2^n.$$

Aus der Tabelle

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	9	16
2^n	1	2	4	8	16

liest man ab, dass die Aussage $n^2 \leq 2^n$ für $n = 0, 1, 2, 4$ gilt, aber nicht für $n = 3$.
Der Induktionsanfang $n = 4$ ist also schon bewiesen.
Induktionsschritt ("$n \mapsto n+1$", wobei $n \geq 4$):

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{n\geq 1}{\leq} n^2 + 3n \overset{n\geq 3}{\leq} n^2 + n^2 = 2n^2 \overset{\text{I.V.}}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Aufgabe 2 Konvergenz von Folgen und Reihen (8 Punkte)

Entscheiden Sie jeweils (ohne Begründung), ob die untenstehenden Folgen und Reihen (uneigentlich) konvergieren und geben Sie, wenn möglich ihren Grenzwert an.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^n}\right)^{2n^n}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und zwar gegen $\mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$,
denn $(1+\frac{c}{k})^k \xrightarrow{k\to\infty} \mathrm{e}^c$ (mit $c = -2$ und $k = 2n^n$).

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_1 = \pi$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{\pi}{b_n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und zwar gegen $\sqrt{\pi}$,
denn laut Zentralübung ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt und für den Grenzwert c gilt $c = \frac{1}{2}(c + \frac{\pi}{c})$.

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n + \sqrt{1 + |c_n|^{\frac{1}{n}}}$ für $n \in \mathbb{N}$

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, und zwar bestimmt gegen ∞, da $c_{n+1} \geq c_n + 1$, also $c_n \geq n$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4+3\mathrm{i}}{5}\right)^n$

Die Reihe ist nicht konvergent, weil wegen $|4+3\mathrm{i}| = 5$ und damit $\left|\left(\frac{4+3\mathrm{i}}{5}\right)^n\right| = 1$ die Folge der Summanden keine Nullfolge bilden.

Aufgabe 3 Konvergenzradius (8 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Leiten Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (2q)^{(k^2)} z^k$ in Abhängigkeit von $q \in \mathbb{C}$ her.

Mit $a_k = (2q)^{(k^2)}$ ist der Konvergenzradius R gegeben durch

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|(2q)^{(k^2)}|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} (2|q|)^k} = \begin{cases} \infty & \text{für } |q| < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für } |q| > \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } |q| = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

da $\limsup\limits_{k\to\infty} p^k = \lim\limits_{k\to\infty} p^k = 0$ für $0 \leq p < 1$, $= 1$ für $p = 1$ und $= \infty$ für $p > 1$.

Aufgabe 4 Zwischenwerteigenschaft der Ableitung (9 Punkte)

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) > 0$. Beweisen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitung, dass es ein $x \in (a, b)$ gibt mit $f(x) > f(a)$.

0 1 2 3 4

Es gilt $0 < f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Annahme: Für alle $x \in (a, b)$ gelte $f(x) \leq f(a)$.
Dann gilt also auch für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ mit $x_n \to a$, dass

$$0 < f'(a) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}_{\leq 0} \leq 0.$$

Widerspruch.

(b) Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) > 0 > f'(b)$. Beweisen Sie, dass es ein $x \in (a, b)$ gibt, mit $f'(x) = 0$. Hinweis: Diskutieren Sie Extrema von f.

0 1 2 3 4 5

Wegen $f'(a) > 0$ ist nach (a) der Randpunkt a keine Maximalstelle von f.
Genausowenig ist wegen $f'(b) < 0$ der rechte Randpunkt b eine Maximalstelle von f, was man durch Spiegelung an der Achse $x = \frac{a+b}{2}$) auch aus (a) erhält.
Da f stetig ist, gibt es nach dem Satz vom Maximum eine Maximalstelle $x \in (a, b)$ von f.
Dort gilt aber $f'(x) = 0$.

Alternativ:
Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $f(b) \leq f(a)$ ist (andernfalls spiegle man an der Achse $x = \frac{a+b}{2}$).
Wegen (a) gibt es ein $x' \in (a, b)$ mit $f(x') > f(a)$.
Da f stetig ist gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x'' \in (x', b)$ mit $f(x'') = f(a)$.
Nach dem Satz von Rolle (oder MWS) gibt es ein $x \in [a, x'']$ mit $f'(x) = 0$ und damit $g'(x) = y$.

Aufgabe 5 Taylorentwicklung (11 Punkte)

In dieser Aufgabe werden keine Folgefehler berücksichtigt.

0 1 2

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügend oft differenzierbar. Wie lautet das Taylorpolynom n-ter Ordnung von f im Entwicklungspunkt 0?

$$T_n f(x; 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

0 1 2

(b) Sei im Folgenden $f(x) = \arctan(x^2)$. Berechnen sie die Ableitung von f.

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$$

0 1 2 3

(c) Geben Sie das Taylorpolynom 9. Ordnung von f' im Entwicklungspunkt 0 an:

$$T_9(f')(x; 0) = 2x - 2x^5 + 2x^9$$

0 1 2 3 4

(d) Wie lauten die ersten drei von 0 verschiedenen Terme der Taylorentwicklung von f, $f(x) = \arctan(x^2)$, im Entwicklungspunkt 0?

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^{10} + \mathcal{O}(x^{14})$$

Aufgabe 6 Integration (8 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar mit $f(a) = c$, $f(b) = d$ und $f'(x) > 0$ für $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_c^d f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = bd - ac - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Hinweis: Benutzen Sie die Funktion f zur Substitution und verwenden dann partielle Integration.

Wir substituieren $y = f(x)$, d.h., formal $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$. Somit ist

$$\int_c^d f^{-1}(y)\mathrm{d}y = \int_{f^{(-1)}(c)}^{f^{(-1)}(d)} f^{-1}(f(x))f'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x$$

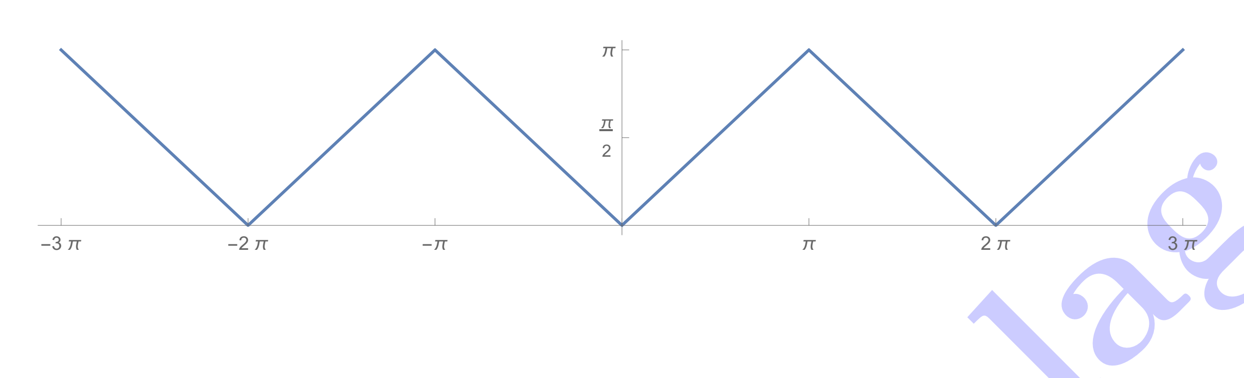
$$= [xf(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = bd - ac - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 7 **Fourierkoeffizienten (15 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = |x|$ für $|x| \leq \pi$.

0 1 2

(a) Skizzieren Sie den Graph von f im Bereich $[-3\pi, 3\pi]$.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

(b) Berechnen Sie die Fourierkosinus-Koeffizienten $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x$ von f für $k \in \mathbb{N}_0$.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(kx)\mathrm{d}x$$

$$\overset{k>0}{=} \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\mathrm{d}x$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(kx)-1}{k^2} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & k > 0 \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

und für $k = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x = \pi$$

(c) Die Fourierreihe $x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)$ konvergiert gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

☐ nicht ☒ punktweise ☒ gleichmäßig

Aufgabe 8 **Matrixexponential (10 Punkte)**

(a) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass $U(t) = \mathrm{e}^{tA}$ ist, indem Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t) = AU(t)$ zeigen.

0 1 2 3 4

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$AU(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t)$$

(b) Sei nun $C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Begründen Sie kurz, warum $\mathrm{e}^{tA+C} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{C}$ ist.

0 1 2

Nach Vorlesung gilt dies, weil tA und C kommutieren, d.h.,

$$[tA, C] = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ct \\ ct & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -ct \\ ct & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(c) Wie lautet also explizit das Matrixexponential von $\begin{pmatrix} c & -t \\ t & c \end{pmatrix}$?

0 1 2 3 4

$$\exp\begin{pmatrix} c & -t \\ t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^c\cos t & -\mathrm{e}^c\sin t \\ \mathrm{e}^c\sin t & \mathrm{e}^c\cos t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^c\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

(c) Herleitung: $\exp\begin{pmatrix} c & -t \\ t & c \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{tA+C} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{C} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^c & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix} = \mathrm{e}^c\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

Zusätzlicher Platz für Lösungen und Nebenrechnungen. Nur deutlich referenzierte und gekennzeichnete Lösungen können für eine Aufgabe gewertet werden.

Lösungsvorschlag