Zentralübung

Z14.1. Lineare Unabhängigkeit

(a) Seinen $e_1, \dots, e_n$ Vektoren eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) mit Skalarprodukt und $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$. Beweisen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

(b) $(1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x)$ bildet eine Basis des von $(e_k)_{k \in \{-2,-1,0,1,2\}}$ aufgespannten $\mathbb{C}$-Untervektorraums von $\mathcal{R}$, wobei $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Z14.2. Sinus- und Kosinuskoeffizienten

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle 2π-periodische Funktion mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, deren Fourierreihe gegen f konvergiert. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\widehat{f}_k^{\cos} := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x, \qquad \widehat{f}_k^{\sin} := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x.$$

Die $\widehat{f}_k^{\cos} \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, heißen (Fourier-)Kosinuskoeffizienten,
die $\widehat{f}_k^{\sin} \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, heißen (Fourier-)Sinuskoeffizienten.

(a) Man drücke $\widehat{f}_k$ durch die Sinus- und Kosinuskoeffizienten aus und umgekehrt.

(b) Es gilt $f(x) = \frac{\widehat{f}_0^{\cos}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\widehat{f}_k^{\cos} \cos(kx) + \widehat{f}_k^{\sin} \sin(kx) \big)$.

(c) Ist f eine gerade Funktion ($f(x) = f(-x)$), so sind die Sinuskoeffizienten gleich 0, ist f eine ungerade Funktion ($f(x) = -f(-x)$), so sind die Kosinuskoeffizienten gleich 0. Was bedeutet dies für die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}_k$.

Z14.3. Fourierkoeffizienten

Wie lauten die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$. Was können Sie über die Konvergenz der Fourierreihe sagen?

Präsenzaufgaben

P14.1. Fourierkoeffizienten

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische Funktion mit den Fourierkoeffizienten $\widehat{f}_k \in \mathbb{C}$.

(a) Für alle $y \in \mathbb{R}$ ist $\int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x$.

(b) Wie lauten die Fourierkoeffizienten der verschobenen Funktion $g(x) = f(x - y)$?

(c) Wie lauten die Fourierkoeffizienten der π-periodischen Funktion $h(x) = f(2x)$?

P14.2. Fourierkoeffizienten von $|\cos(\frac{x}{2})|$

Berechnen Sie die Fourier-Cosinus-Koeffizienten $\widehat{f}_k^{\cos}$ von $f(x) = |\cos(\frac{x}{2})|$,

(a) durch partielle Integration direkt mittels $\widehat{f}_k^{\cos} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x$,

(b) mittels komplexwertiger Integration und der Beziehung $\widehat{f}_k^{\cos} = \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Konvergiert die Fourierreihe von f gegen f punktweise und/oder gleichmäßig?

P14.3. Fourierreihen

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0), \\ x, & x \in [0, \pi), \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pi. \end{cases}$

(a) Skizzieren Sie die Funktion im Bereich $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten.

(c) Die Fourierreihe von f konvergiert punktweise gegen f. ☐ Ja ☐ Nein
Die Fourierreihe von f ist gleichmäßig konvergent. ☐ Ja ☐ Nein

Hausaufgaben

H14.1. Fourierreihe

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Skizzieren Sie $f(x)$ und bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f.

(b) Welchen Wert haben die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$?

H14.2. Fourierkoeffizienten

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in (-\pi, 0) \\ \cos x, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x = 0, \pi \end{cases}$$

und diskutieren Sie die Konvergenz der Fourierreihe.

H14.3. Fourierkosinuskoeffizienten

Bestimmen Sie die Fourierkosinuskoeffizienten $a_k := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x$ der Funktion $f(x) = |\sin x|$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und diskutieren Sie die Konvergenz der Fourierreihe.

Hausaufgabenabgabe: Donnerstag, 06.02.2020, bis 14:00, Briefkasten im Keller des FMI Gebäudes. Diese Hausaufgaben werden nicht korrigiert, können aber bei Abgabe als sinnvoll bearbeitet gewertet werden.