Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2019W

WS 2019/20
Blatt 13
(21.01.2020)

Zentralübung

Z13.1. Taylorentwicklung

Geben Sie die Taylorreihe von (a) exp und (b) sin jeweils im Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an und zeigen Sie, dass diese Taylorreihen auf ganz $\mathbb{R}$ jeweils gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren.
Hinweis: Additionstheoreme

Z13.2. Stammfunktionen von Potenzreihen

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von

(a) $x \mapsto \operatorname{erf}(x)$ mit $\operatorname{erf}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t$, (b) $x \mapsto \arctan(x)$

im Entwicklungspunkt 0 und ihren Konvergenzradius.

Z13.3. Binomialreihe

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, definiert die Funktion $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, da der Konvergenzradius der Reihe, wie bekannt, gleich 1 ist. Man zeige:

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{n}$ (Induktion).
(b) f genügt der Differentialgleichung $f' = \frac{\alpha}{1+x} f$.
(c) Für $|x| < 1$ ist $f(x) = (1+x)^\alpha$. *Hinweis:* Man zeige, dass der Quotient gleich 1 ist.

Präsenzaufgaben

P13.1. Taylorreihe des Arcussinus

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\arcsin : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt 0.
Hinweis: Binomialreihe der Ableitung.

P13.2. Taylorentwicklung der Potenzfunktion

Bestimmen Sie jeweils das sechste Taylorpolynom von f um den Ursprung, jeweils für

(a) $f(x) = \sin(x)$,
(b) $f(x) = \sin(x^2)$,
(c) $f(x) = \sin(x^2 + 2x)$,
(d) $f(x) = \sin(\sin(x))$.

P13.3. Taylorpolynome

(a) Bestimmen Sie ein Taylorpolynom für die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1-x}{1+x}$, das von der Funktion auf dem Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ höchstens um ein Prozent abweicht.
(b) Bestimmen Sie die ersten drei von Null verschiedenen Terme der Taylorentwicklung der relativistischen Energie $E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ eines Teilchens der Ruhemasse m_0, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt (und interpretieren Sie sie).

Hausaufgaben

H13.1. Taylorpolynom einer Umkehrfunktion

Geben Sie für die Umkehrfunktion von $f(x) = x + x^3$ das Taylorpolynom der Ordnung 3 im Punkt 2 an.

H13.2. Taylorreihen

(a) Man bestimme die Taylorreihe der stetigen Fortsetzung von $\frac{\sin x}{x}$ um $x = 0$ und zeige, dass sie auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Funktion selbst konvergiert.

(b) Wie lautet die Taylorreihe der Funktion $\mathrm{Si}(x) := \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ im Entwicklungspunkt 0?

(c) Wieviele Terme der Taylorreihe von $\mathrm{Si}(x)$ muss man berücksichtigen, wenn der absolute Fehler für $|x| \leq 1$ kleiner als 0.002 sein soll?

H13.3. Taylorentwicklung der Potenzfunktion

Geben Sie die Taylorreihe von $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, im Entwicklungspunkt $x_0 > 0$ an und zeigen Sie, dass sie im Konvergenzbereich gegen die ursprüngliche Funktion konvergiert.
Hinweis: Binomialreihe

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 04.02.2020, vor Beginn der Zentralübung