TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2019W

WS 2019/20
Blatt 12
(14.01.2020)

Zentralübung

Z12.1. Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie Stammfunktionen von $\frac{4!}{x(x-1)(x-2(x-3)}$.

Z12.2. Uneigentliches Integral

Das uneigentliche Riemann-Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ ist konvergent, aber nicht absolut.

Z12.3. HDI für komplexwertige Funktionen

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt **differenzierbar**, wenn $f'(x) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in \mathbb{C}$ für jedes $x \in I$ existiert. Wie im Reellen heißt $F : I \to \mathbb{C}$ **Stammfunktion** von f, wenn $F' = f$ gilt. Man zeige den

Hauptsatz der Differential- und Integralrechung für komplexwertige Funktionen: Ist $F : I \to \mathbb{C}$ Stammfunktion der auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{C}$, so gilt für alle $a, b \in I$

$$\int\limits_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

HINWEISE:
(i) Für $b < a$ setzt man $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$. (ii) Zeige $f'(x) = (\mathrm{Re} f)'(x) + \mathrm{i}(\mathrm{Im} f)'(x)$.

Präsenzaufgaben

P12.1. Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie $\int\limits_0^1 \frac{2x^2+12x-22}{x^2+6x-16}\mathrm{d}x$.

P12.2. Uneigentliche Integrale

Untersuchen Sie das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie, wenn möglich, seinen Wert.

P12.3. Gleichmäßige Konvergenz

Beweisen Sie für die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

(b) f_n konvergiert auf $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig.

(c) Für $\alpha \in (0,1)$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^\alpha f_n(x)\mathrm{d}x = 0$. HINWEIS: Substitution $y = nx$.

Hausaufgaben

H12.1. Partialbruchzerlegung

Wie lautet jeweils der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktionen:

(a) $\frac{x^3}{x-1}$, (b) $\frac{x^4+x^2}{x^4-1}$, (c) $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$, (d) $\frac{8x}{(x^2-1)(x-1)^2}$,

Bestimmen Sie die Koeffizienten und jeweils eine Stammfunktion mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms.

H12.2. Uneigentliche Integrale

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\int\limits_{-1}^{1} \ln|x| \mathrm{d}x$, (b) $\int\limits_{0}^{1} (\ln x)^2 \mathrm{d}x$, (c) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(\cos(x)+x)}$.

H12.3. Gleichmäßige Konvergenz

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n, g_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-nx}$, $g_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x^n}$.

(a) Untersuchen Sie, ob f_n und g_n für $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein Maximum und Minimum besitzen.

(b) Bestimmen Sie jeweils den punktweisen Limes der Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Entscheiden jeweils, ob $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergieren.

Hinweis: Skizzieren Sie die Funktionen. Schreiben Sie f_n und g_n als Komposition von Funktionen unter Verwendung von f_1.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 28.01.2020, vor Beginn der Zentralübung