TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1) MA9202

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2019W`

WS 2019/20
Blatt 11
(07.01.2020)

Zentralübung

Z11.1. Gegenbeispiele zum HDI

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt im Wesentlichen, dass Integration die Umkehrung der Differentiation ist.

(a) Gibt es eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, für die $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ keine Stammfunktion ist?

(b) Geben Sie eine differenzierbare Funktion $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ an, für die $G' : [a,b] \to \mathbb{R}$ nicht Riemann-integrierbar ist.

Z11.2. Logarithmische Ableitung

(a) Sei f stetig differenzierbar und nullstellenfrei auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$.

Präsenzaufgaben

P11.1. Integration

(a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Werten Sie das Integral $\int_a^b f(x)f'(x)\mathrm{d}x$ aus.

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Drücken Sie das Integral $\int_a^b f(cx+d)\mathrm{d}x$ durch F aus.

(c) Finden Sie Stammfunktionen von $\frac{\ln x}{x}$ und $\sqrt{3x+4}$.

P11.2. Stammfunktionen

Bestimmen Sie jeweils Stammfunktionen von

(a) $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$, (b) tan, (c) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, (d) arctan, (e) $x \mapsto \sin^2 x$.

P11.3. Partielle Integration

Beweisen Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ die Formel $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

Hausaufgaben

H11.1. Stammfunktionen

Bestimmen Sie Stammfunktionen von

(a) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, (b) $x \mapsto x^2 \sin x$, (c) $x \mapsto \sin x \cos x$, (d) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$,

wobei (c) und (d) jeweils sowohl mit partieller Integration, als auch mit Substitution gelöst werden sollen. HINWEIS: in (d) substituiere man x durch $g(t) = \sin t$.

H11.2. Integration

Bestimmen Sie explizit folgende Stammfunktionen:

(a) $\int x^n \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}_0$, (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(2x)}$, Substitution: $g(x) = \tan x$

H11.3. Partielle Integration, Wallis-Produktdarstellung von π

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, \mathrm{d}t$, wobei $\sin^n(t) = (\sin t)^n$ bedeutet. Zeigen Sie:

(a) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine monoton fallende Zahlenfolge.

(b) $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ und für $n \geq 2$ gilt $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

(c) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = 1$.

(d) Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $I_{2k} = \frac{\pi}{2} \prod\limits_{l=1}^{k} \frac{2l-1}{2l}$ und $I_{2k+1} = \prod\limits_{l=1}^{k} \frac{2l}{2l+1}$.

(e) $\frac{\pi}{2} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 21.01.2020, vor Beginn der Zentralübung