Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1) MA9202

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9202_2019W

WS 2019/20
Blatt 10
(17.12.2019)

Zentralübung

Während der Zentralübung wird die Probeklausur geschrieben.

Präsenzaufgaben

P10.1. L'Hospitalsche Regel

Wenden sie die folgenden Spezialfälle der l'Hospitalschen Regel

- $f, g : (0, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für $x \in (0, b)$:

$$\big(f(x), g(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \vee f(x), g(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty\big) \wedge \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

- $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, \infty)$:

$$\big(f(x), g(x) \overset{x\to \infty}{\longrightarrow} 0 \vee f(x), g(x) \overset{x\to \infty}{\longrightarrow} \infty\big) \wedge \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

um die folgenden Grenzwerte zu berechnen:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \big(x \ln(1 + \frac{1}{x})\big)$,

f) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$.

P10.2. Der Schrankensatz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f' : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, dann ist f Lipschitz-stetig.

P10.3. Kurvendiskussion

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

b) Untersuchen Sie Monotonie-, und Konvexitätsbereiche von f.

c) Untersuchen Sie (lokale/globale) Extrema und Wendepunkte von f.

d) Skizzieren Sie die Funktion.

Hausaufgaben

H10.1. L'Hospitalsche Regel

Berechnen Sie die folgenden Limites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2}\Big)$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}}$, $\alpha, \beta > 0$.

H10.2. Lösungen einer einfachen Differentialgleichung

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir bestimmen alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = \lambda y$.
Für eine differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $y'(t) = \lambda y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie dass es dann ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $y(t) = c\,\mathrm{e}^{\lambda t}$.

H10.3. Kurvendiskussion

Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$.

a) Untersuchen Sie die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von f.

b) Untersuchen Sie Monotonie, und (lokale) Extrema von f. Warum ist f strikt konvex?

c) Skizzieren Sie die Funktion.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 14.01.2020, vor Beginn der Zentralübung

Wir wünschen Ihnen fröhliche und erholsame Feiertage und ein erfolgreiches Jahr 2020!